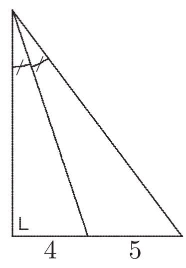
1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 2006-2007: tweede ronde

1. In een rechthoekige driehoek verdeelt de bissectrice uit een scherpe hoek de overstaande zijde in twee stukken met lengten 4 en 5 (zie figuur). De oppervlakte van de driehoek is



(A) 36	(B) 40	(C) 45	(D) 54	(E) 60

2. Men schrijft alle getallen van 999 tot en met 2007 achter elkaar:

$$999100010011002\ldots20062007$$

Wat is het middelste cijfer in deze notatie?

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 5

3. Als $\sqrt{1-\cos^2 x} - \sqrt{1+\sin^2 x} = k$ dan is $\sqrt{1-\cos^2 x} + \sqrt{1+\sin^2 x}$ gelijk aan

(A) $\dfrac{1}{k}$	(B) $\dfrac{2}{k}$	(C) $2k$	(D) $-\dfrac{1}{k}$	(E) $-k$

4. Vermits $n!$ en $(n+1)!$ natuurlijke getallen zijn kunnen zij elk op unieke wijze worden ontbonden in priemfactoren. Als de ontbinding van elk van beide getallen precies 18 keer de factor 2 bevat, waaraan is n dan gelijk?

(A) 18	(B) 19	(C) 20	(D) 21	(E) 22

5. Noah fietst naar school aan een snelheid van 20 km/u over een vlakke weg. Hij moet een spoorwegbrug over waarvan de oprit even lang is als de afrit. Over het stijgende gedeelte haalt hij slechts 15 km/u. Hoe snel moet hij dan de afdaling doen om toch nog aan een gemiddelde van 20 km/u te komen?

(A) 24 km/u	(B) 25 km/u
(C) 27 km/u	(D) 30 km/u
(E) dat hangt af van de lengte van de op- en afritten	

[0]Copyright Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. 2007

6. Als je vier bepaalde hoekpunten van een kubus (met inhoud 1) verbindt, verkrijg je een regelmatig viervlak met inhoud

(A) $\frac{1}{8}$	(B) $\frac{1}{6}$	(C) $\frac{1}{4}$	(D) $\frac{1}{3}$	(E) $\frac{1}{2}$

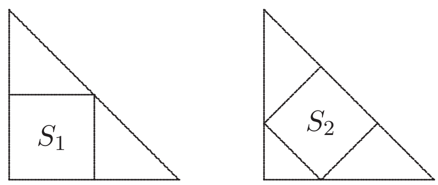
7. De lengte a van een rechthoekszijde en de lengte b van de schuine zijde van een rechthoekige driehoek zijn opeenvolgende natuurlijke getallen. De lengte van de andere rechthoekszijde is

(A) $\sqrt{a+b}$	(B) $\sqrt{b-a}$	(C) $\sqrt{ab}$	(D) $\sqrt{\frac{a}{b}}$	(E) $\sqrt{\frac{b}{a}}$

8. Elvis Singer heeft een kleinzoon. Binnenkort echter worden er nog drie andere kleinkinderen van Elvis Singer geboren. Hoe groot is de kans dat Elvis Singer na de blijde gebeurtenissen precies twee kleinzonen en twee kleindochters heeft?
(Neem aan dat bij een geboorte de kans op een jongen dezelfde is als de kans op een meisje.)

(A) $\frac{1}{8}$	(B) $\frac{1}{4}$	(C) $\frac{1}{3}$	(D) $\frac{3}{8}$	(E) $\frac{2}{3}$

9. In twee congruente gelijkbenige rechthoekige driehoeken wordt op twee verschillende manieren een vierkant ingeschreven met oppervlakten S_1 en S_2 (zie figuur). Dan is



(A) $S_1 = S_2$	(B) $S_1 = \frac{2}{3}S_2$	(C) $S_1 = \frac{7}{9}S_2$
(D) $S_1 = \frac{8}{9}S_2$	(E) $S_1 = \frac{9}{8}S_2$	

10. Er is geweten dat $x = \dfrac{a+\sqrt{b}}{2}$ met a, $b \in \mathbb{N}$ een oplossing is van $x^4 + x^{-4} = 47$. De waarde van $a + b$ is

(A) 3	(B) 4	(C) 5	(D) 6	(E) 8

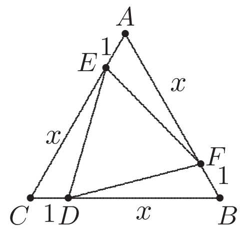
11. Gegeven: α, $\beta \in]0°, 90°[$ en $\sin(\alpha+\beta) = 2\sin(\alpha-\beta) = 1$. Dan is $\tan(\alpha + 3\beta)$ gelijk aan

(A) $-\sqrt{3}$	(B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$	(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$	(E) $\sqrt{3}$

12. De som van het aantal diagonalen van een convexe veelhoek met n zijden en het aantal diagonalen van een convexe veelhoek met m zijden ($n > m$) is 64. Waaraan is (m, n) gelijk?

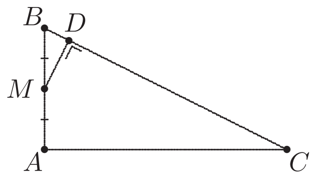
(A) $(7, 11)$	(B) $(7, 12)$	(C) $(6, 12)$	(D) $(9, 10)$	(E) $(8, 11)$

13. De zijden van een gelijkzijdige driehoek ABC worden verdeeld in 2 stukken met lengte 1 en lengte x ($x > 1$). De verdeelpunten D, E, F zijn eveneens de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek. Hoe groot is x als de oppervlakte van $\triangle ABC$ het dubbel is van de oppervlakte van $\triangle DEF$?



(A) 3	(B) π	(C) 3,75	(D) $2 + \sqrt{3}$	(E) $3 + \sqrt{2}$

14. Een rechthoekige driehoek ABC is gegeven, waarbij $|AM| = |MB|$ en $MD \perp BC$ (zie figuur).
Dan is $|AC|^2$ gelijk aan

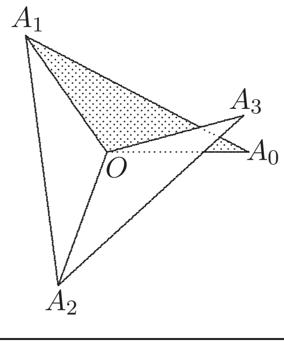


(A) $\lvert DC\rvert^2 - \lvert DB\rvert^2$	(B) $\lvert DC\rvert^2 + \lvert DB\rvert^2$	(C) $\lvert BC\rvert^2 - \lvert MB\rvert^2$
(D) $\lvert DC\rvert^2 - \lvert MB\rvert^2$	(E) $\lvert DC\rvert^2 + \lvert MB\rvert^2$	

15. De punten A, B, C en D liggen op een cirkel en AB en CD snijden elkaar buiten de cirkel in het punt P. Als $|AB| = 7$, $|BP| = 5$ en $|PD| = 3$, bepaal dan de lengte van $[CD]$.

(A) 13	(B) 17	(C) 20	(D) $\frac{21}{5}$	(E) $\frac{35}{3}$

16. Een gelijkbenige driehoek OA_0A_1 met een tophoek van $125°$ wordt gespiegeld t.o.v. OA_1 en zo verkrijgt men de driehoek OA_1A_2. Deze driehoek wordt gespiegeld t.o.v. OA_2 en zo verkrijgt men de driehoek OA_2A_3. Men blijft op deze manier opeenvolgende spiegelingen uitvoeren tot men een driehoek verkrijgt die samenvalt met de oorspronkelijke driehoek. Wat is het minimaal aantal keren dat men een spiegeling moet uitvoeren?



(A) 6	(B) 9	(C) 12	(D) 36	(E) 72

17. Een piramide heeft als grondvlak een vierkant met zijde $\sqrt{3}$ en vier opstaande ribben met lengte $\sqrt{2}$. Bepaal de hoek tussen twee opstaande ribben die niet in hetzelfde zijvlak liggen.

(A) 60°	(B) 90°	(C) 120°	(D) 135°	(E) 150°

18. Hoeveel reële oplossingen heeft de vergelijking

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0?$$

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) meer dan 3

19. Als je de stop van het bad insteekt, duurt het a minuten om het bad te vullen. Als je de stop uittrekt, duurt het b minuten om het bad te laten leeglopen ($b > a$). Hoeveel minuten duurt het om het bad te vullen als de stop uitgetrokken is?

(A) $b - a$	(B) $ab(b-a)$	(C) $\dfrac{a+b}{2}$	(D) $\dfrac{ab}{b-a}$	(E) $\dfrac{2ab}{a+b}$

20. Op hoeveel manieren kan je 10 verschillende getallen kiezen uit $\{1, 2, \ldots, 11, 12\}$ zodat hun som deelbaar is door 3?

(A) 22	(B) 24	(C) 28	(D) 56	(E) 66

21. Frank zegt aan Paul dat het product van drie natuurlijke getallen gelijk is aan 36. Frank zegt ook aan Paul wat de som van die drie getallen is. Met deze informatie kan Paul deze drie getallen niet uniek bepalen. Wat is de som van deze getallen?

(A) 11	(B) 12	(C) 13	(D) 14	(E) 16

22. Een regelmatige 22-hoek met zijde 1 heeft een in- en een omgeschreven cirkel. Wat is het verschil tussen de oppervlakte van de omgeschreven cirkel en de oppervlakte van de ingeschreven cirkel?

(A) $\dfrac{1{,}5}{22}\pi$	(B) $\dfrac{2{,}5}{22}\pi$	(C) $\dfrac{3{,}5}{22}\pi$	(D) $\dfrac{4{,}5}{22}\pi$	(E) $\dfrac{5{,}5}{22}\pi$

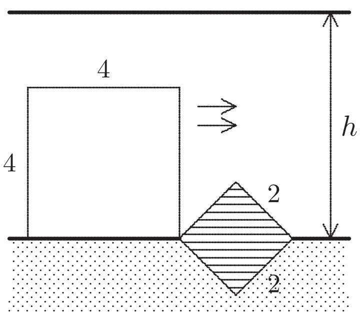
23. Gegeven de vierkantsvergelijking $x^2 + bx - 1 = 0$. Noem σ de som van de omgekeerden van de wortels van deze vierkantsvergelijking. Noem π het product van de omgekeerden van de wortels van deze vierkantsvergelijking. Dan is $\sigma + \pi$ gelijk aan

(A) $b+1$ (B) $b-1$ (C) $-b$ (D) $-\dfrac{1+b}{b}$ (E) $-\dfrac{1}{1+b}$

24. Een tafel rust op vier rechte poten waarvan de voetpunten een rechthoek vormen van 120 cm bij 80 cm. De tafel staat stabiel. De poten zijn genummerd 1, 2, 3 en 4 (in wijzerzin) en men zaagt niets af van de eerste, 3 cm van de tweede en 5cm van de derde poot. Hoeveel cm moet men afzagen van de vierde poot opdat de tafel terug stabiel zou staan?

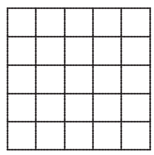
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 7

25. Een balk van $4 \times 4 \times 20$ wordt gekanteld zonder schuiven over een vlakke bodem, waaruit een balk van $2 \times 2 \times 20$ omhoog steekt. De lange ribben van de 2 balken lopen evenwijdig. De figuur toont een doorsnede loodrecht op de lange ribben. Welke hoogte h moet er voor deze beweging minimaal vrijgehouden worden?



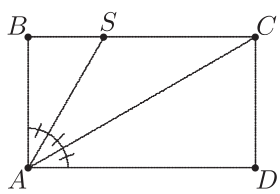
(A) $\sqrt{35}$ (B) $\sqrt{2}+\sqrt{20}$ (C) $\sqrt{32}$
(D) $\sqrt{2}+\sqrt{17}$ (E) $4+\sqrt{2}$

26. Jan speelt een spelletje op een 5×5 vierkant dat in 25 eenheidsvierkantjes verdeeld is. Hij krijgt 1 punt voor iedere rechthoek die hij er in ziet en een extra punt (dus 2 in totaal) voor ieder vierkant dat hij er in ziet. Hoeveel punten kan Jan maximaal scoren?



(A) 160 (B) 200 (C) 240 (D) 280 (E) 320

27. In een rechthoek $ABCD$ wordt de hoek A in drie even grote delen verdeeld door de lijnstukken $[AC]$ en $[AS]$ met $S \in [BC]$. Als $|AB| = 1$, wat is dan de omtrek van $\triangle ASC$?

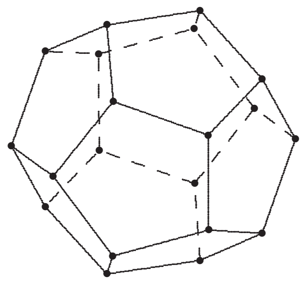


(A) $2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ (B) $2+\sqrt{5}$ (C) $6-\sqrt{3}$ (D) $5-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (E) $3+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

28. Voor hoeveel getallen $a \in \mathbb{Z}$ geldt dat $\dfrac{a^3 - 2a - 2}{2 - a^2} \in \mathbb{Z}$?

(A) 3	(B) 4	(C) 5	(D) 6	(E) $+\infty$

29. Hoeveel ruimtediagonalen heeft een regelmatig twaalfvlak?



(A) 64	(B) 90	(C) 100	(D) 120	(E) 150

30. De zes zijvlakken van een houten kubus met ribbe 4 worden geschilderd. Dan wordt de kubus verzaagd in dobbelstenen met ribbe 1. Er wordt een willekeurige dobbelsteen genomen en die wordt geworpen. Wat is de kans dat precies één van de vijf zichtbare vlakken geschilderd is?

(A) $\dfrac{5}{16}$	(B) $\dfrac{7}{16}$	(C) $\dfrac{15}{31}$	(D) $\dfrac{31}{64}$	(E) $\dfrac{1}{2}$