Vlaamse Wiskunde Olympiade 2007-2008: tweede ronde

1. Jef mixt cola met whisky in de verhouding 1 : 3. In whisky zit 40% alcohol. Wat is het alcoholpercentage van de mix?

(A) 13,33	(B) 20	(C) 25	(D) 30	(E) 35

2. Over 3 jaar zal Daan 3 keer zo oud zijn als 3 jaar geleden. Over 6 jaar zal Daan 6 keer zo oud zijn als . . . jaar geleden. Wat ontbreekt op de plaats van de puntjes?

(A) 2	(B) 3	(C) 4	(D) 5	(E) 6

3. Stel $f(x) = \dfrac{x-a}{x-b}$ voor zekere constanten $a, b \in \mathbb{R}$. Als $f(1)$ niet gedefinieerd is en $f(2) = 0$, dan is $f(0{,}5)$ gelijk aan

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

4. Als $x = \sqrt[6]{2}$, dan is $(x-1)(x^6 + x^7 + \cdots + x^{46} + x^{47})$ gelijk aan

(A) 126	(B) 128	(C) 254	(D) 256	(E) 258

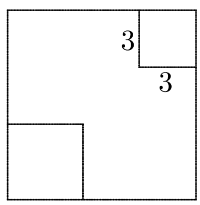
5. De verzameling van de nulwaarden van de reële functie f waarvoor geldt $f(x-2) = x+3$ is gelijk aan

(A) $\{-5\}$	(B) $\{-3\}$	(C) $\{-1\}$	(D) $\{2\}$	(E) $\{5\}$

6. Hoeveel snijpunten heeft de grafiek van de functie $y = x + \sin x$ met de rechte $y = x$ in het interval $[-314, 314]$?

(A) 198	(B) 199	(C) 200	(D) 201	(E) 202

7. Van een vierkant stuk papier met zijde z wordt in de rechterbovenhoek een vierkant stukje afgesneden met zijde 3. Linksonder wordt eveneens een vierkant stukje afgesneden. De rest van het papier verknipt men in 56 vierkante stukjes met oppervlakte 1. Hoe groot is de zijde z?



(A) 9	(B) 10	(C) 12	(D) 13	(E) 33

8. Beschouw de punten $A(-1,0)$ en $B(1,0)$ en een derde punt C op de cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal 1, zodat $\widehat{CAB} = 30°$. Wat is het eerste coördinaatgetal van C?

(A) 0	(B) $\frac{1}{3}$	(C) $\frac{1}{2}$	(D) $\frac{2}{3}$	(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

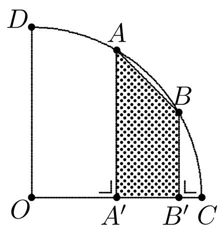
9. $(2x-3)^2 \leq 0$ is gelijkwaardig met

(A) $(2x-3)^2 < 0$	(B) $2x-3 \leq 0$	(C) $2x-3=0$
(D) $2x-3<0$	(E) $(3-2x)^2 \geq 0$	

10. Aan een ronde tafel zitten 8 personen. Door lottrekking worden er 3 uitgekozen om een mop te vertellen. Wat is de kans dat er minstens 2 van hen naast elkaar zitten?

(A) $\frac{4}{7}$	(B) $\frac{3}{8}$	(C) $\frac{2}{3}$	(D) $\frac{5}{7}$	(E) $\frac{5}{8}$

11. Een kwartcirkel $\overset{\frown}{CD}$ met straal 1 en middelpunt O verdeelt men in 3 gelijke delen door middel van de punten A en B. Uit die punten laat men de loodlijnen AA' en BB' neer op de middellijn OC (zie figuur). De oppervlakte van het trapezium $ABB'A'$ bedraagt

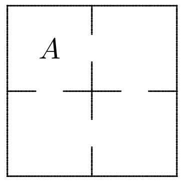


(A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$	(B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$	(C) $\frac{1}{4}$	(D) $\frac{\pi}{8}$	(E) $\frac{\pi}{12}$

12. Hoeveel gehele oplossingen heeft de ongelijkheid $\left|\frac{1}{x-1}\right| > \frac{1}{4}$?

(A) 5	(B) 6	(C) 7	(D) 8	(E) 9

13. Een witte muis bevindt zich in een hok met 4 kamers. Er zijn 4 openingen (zie figuur) waardoor de muis van een kamer naar een andere kan gaan. De muis heeft geen enkele voorkeur wat de openingen betreft. Zij kiest dus elke opening met gelijke kans. De muis bevindt zich in kamer A. Als zij zesmaal door een opening gegaan is, wat is dan de kans dat zij zich opnieuw in kamer A bevindt?

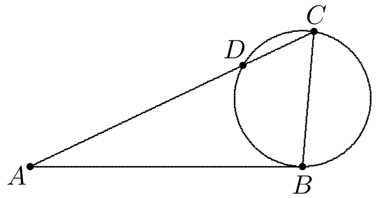


(A) 0,25	(B) 0,333...	(C) 0,375	(D) 0,5	(E) 0,625

14. Alle punten (x, y) waarvoor $|x| + |y| = 2$ vormen

(A) een rechte (B) een cirkel (C) een vierkant
(D) twee rechten (E) vier rechten

15. Het punt A ligt buiten een cirkel die B en C bevat. De rechte AB raakt aan de cirkel. De rechte AC snijdt de cirkel een tweede keer in D. Als $|BC| = 2$, $|AD| = 3$ en $|AC| = 4$, dan is $\widehat{BAD}$ gelijk aan

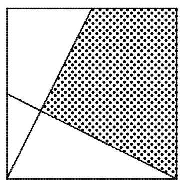


(A) $15°$ (B) $22{,}5°$ (C) $25°$ (D) $27{,}5°$ (E) $30°$

16. Stel $f(n) = 1! + 2! + 3! + 4! + \ldots + (n-1)! + n!$ met $n \neq 0$. Welk van de volgende getallen heeft de grootste rest bij deling door 9?

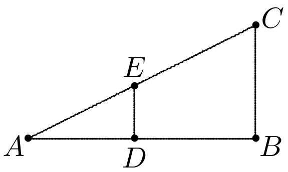
(A) $f(4) + 4$ (B) $f(8) + 8$ (C) $f(12) + 12$
(D) $f(16) + 16$ (E) $f(20) + 20$

17. In een vierkant met zijde 2, verbindt men 2 keer het midden van een zijde met een hoekpunt, zoals op de figuur. Hoe groot is de oppervlakte van het gearceerde gebied?



(A) 2 (B) 2,2 (C) 2,25 (D) 2,5 (E) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

18. In een rechthoekige driehoek ABC met $\hat{A} = 30°$ trekt men het lijnstuk $[DE]$ evenwijdig met $[BC]$, zodanig dat opp $\triangle ABC = 3 \cdot$opp $\triangle ADE$.
Dan is:



(A) $|AE| = |BD|$ (B) $|AD| = |DB|$ (C) $|AE| = |BC|$
(D) $|AD| = |EC|$ (E) $|AD| = |BC|$

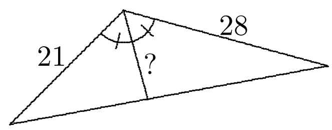
19. Hoeveel reële getallen m betaan er waarvoor de vergelijkingen $x^2 + mx + 1 = 0$ en $x^2 + x + m = 0$ minstens één gemeenschappelijke reële oplossing hebben?

(A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 4 (E) oneindig veel

20. De diagonalen van een ruit hebben als lengtes 3 en 7,2. De afstand tussen de evenwijdige zijden van de ruit is gelijk aan

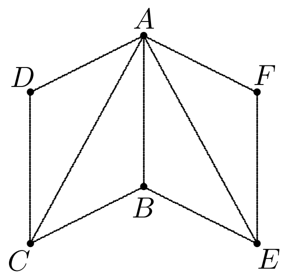
(A) $\frac{12}{5}$	(B) $\frac{36}{13}$	(C) $\frac{18}{13}$	(D) $\frac{72}{13}$	(E) $\frac{36}{17}$

21. In een driehoek sluiten 2 zijden met lengte 21 en 28 een hoek van 120° in. De lengte van de bissectrice van die hoek (van hoekpunt tot overstaande zijde) is gelijk aan



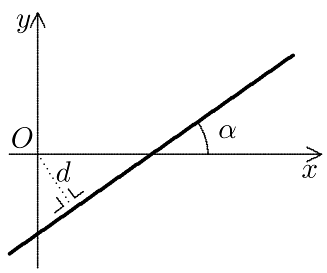
(A) 9	(B) 12	(C) 14	(D) 15	(E) $3\sqrt{37}$

22. Twee vierkanten $ABCD$ en $ABEF$ in de ruimte hebben een gemeenschappelijke zijde $[AB]$ (zie figuur). Bepaal de hoek $\widehat{CBE}$ als $\widehat{CAE} = 60°$.



(A) 135°	(B) 120°	(C) 90°	(D) 60°	(E) 45°

23. Een rechte die de positieve x-as en de negatieve y-as snijdt, maakt een hoek α $(0° < \alpha < 90°)$ met de x-as. Als d de afstand is van de oorsprong tot de rechte, dan is een vergelijking van deze rechte



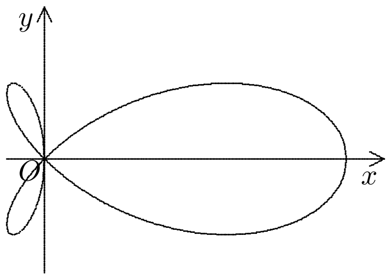
(A) $x\cos\alpha + y\sin\alpha = d$ (B) $x\sin\alpha + y\cos\alpha = d$
(C) $x\cos\alpha - y\sin\alpha = d$ (D) $x\sin\alpha - y\cos\alpha = d$
(E) $x\sin\alpha - y\cos\alpha = -d$

24. Als a, b en c drie verschillende getallen zijn zodat $a^2 - bc = 7$, $b^2 + ac = 7$ en $c^2 + ab = 7$, dan is $a^2 + b^2 + c^2$ gelijk aan

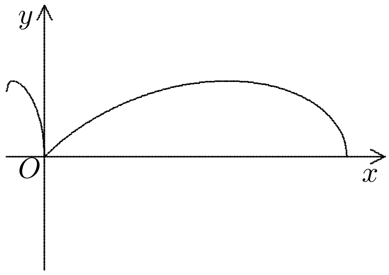
(A) 8	(B) 10	(C) 12	(D) 14	(E) 16

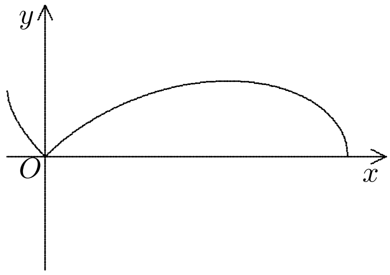
25. De grafieken van de reële functies met functievoorschrift

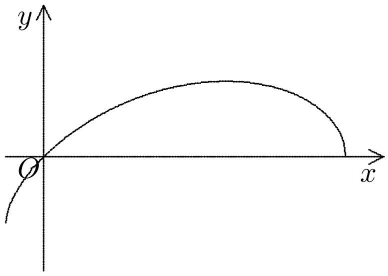
$$g_1(x) = \sqrt{-(x^2+2x)+\sqrt{8x^3+4x^2}}$$
$$g_2(x) = -\sqrt{-(x^2+2x)+\sqrt{8x^3+4x^2}}$$
$$g_3(x) = \sqrt{-(x^2+2x)-\sqrt{8x^3+4x^2}}$$
$$g_4(x) = -\sqrt{-(x^2+2x)-\sqrt{8x^3+4x^2}}$$

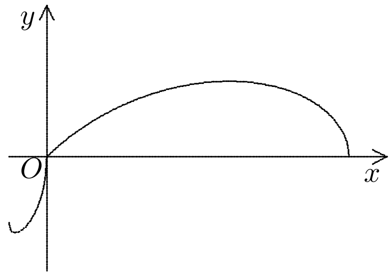


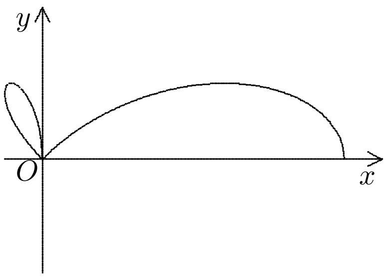
vormen samen het **trifolium** van **De Longchamps** (zie figuur). Het deel van de kromme bepaald door g_1 is

(A)


(B)


(C)


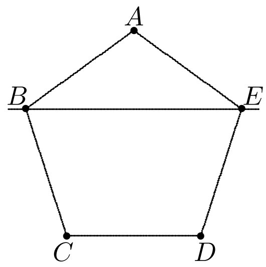
(D)


(E)


26. BOB en HANNAH zijn palindromen (woorden van 1 of meerdere letters die hetzelfde gelezen worden van links naar rechts als van rechts naar links). Hoeveel palindromen kunnen er in het totaal met deze letters gemaakt worden? Er mogen hoogstens zoveel exemplaren van de letters gebruikt worden als gegeven zijn. De palindromen hoeven als woord geen betekenis te hebben.

(A) 24	(B) 129	(C) 133	(D) 188	(E) 193

27. Een regelmatige vijfhoek heeft zijde 1. Men spiegelt het punt A om de rechte BE. Op welke afstand van de zijde $[BC]$ ligt het spiegelbeeld van A?



(A) $\tan 36°$	(B) $\sin 54°$	(C) $\cos 54°$	(D) $\sin 72°$	(E) $\cos 72°$

28. Hoeveel koppels gehele getallen (a, b) zijn er, met a, $b > 1$, waarvoor

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} = \sqrt{ab-1}?$$

(A) 0	(B) 1	(C) 3
(D) 5	(E) oneindig veel	

29. Hoeveel veeltermfuncties van de derde graad hebben een grafiek die gaat door de punten $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$ en $(3, 9)$?

(A) 0	(B) 1	(C) 2
(D) 3	(E) oneindig veel	

30. De punten (x, y) in het vlak die voldoen aan $(x^2 - y^2)(x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2) = 0$ verdelen het vlak in een aantal delen (waarvan sommige begrensd en andere niet). Hoeveel delen zijn dat?

(A) 10	(B) 20	(C) 24	(D) 28	(E) 32