

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 2005-2006: tweede ronde

Volgende benaderingen kunnen nuttig zijn bij het oplossen van sommige vragen.

$$\sqrt{2} \approx 1,4142$$

$$\sqrt{3} \approx 1,7321$$

$$\sqrt{5} \approx 2,2361$$

$$\pi \approx 3,1416$$

1. Als $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^m = a$ met $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$, dan is m gelijk aan

- (A) 0,3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 9 (E) 10

2. Als a en b gelijk zijn aan 6, dan geldt dat $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{3}$. Als a en b verschillende natuurlijke getallen zijn, dan geldt dezelfde gelijkheid alleen als $a + b$ gelijk is aan

- (A) 3 (B) 6 (C) 12 (D) 16 (E) 18

3. Welke van volgende uitspraken is correct voor elke tweedegraadsvergelijking

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

die twee gelijke wortels heeft?

- (A) $a \neq b \neq c \neq a$ (B) $a < 0, b < 0, c < 0$
(C) $b < 0, a > 0, c > 0$ (D) $2b = a + c$
(E) $b^2 = a \cdot c$

4. Definities

$$\text{Arcsin } x = y \Leftrightarrow x = \sin y \text{ en } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Arccos } x = y \Leftrightarrow x = \cos y \text{ en } 0 \leq y \leq \pi.$$

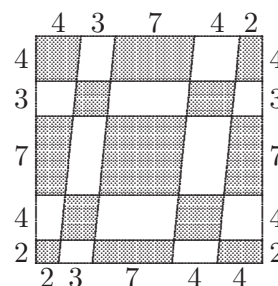
Als je nu weet dat $\text{Arcsin } x = \frac{\pi}{6}$ dan is $\text{Arccos } x =$

- (A) $\frac{5\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2}$
(D) $1 - \frac{\pi}{6}$ (E) 0

5. De som van de cijfers van $\frac{10^{2006} + 2006}{9}$ is gelijk aan

- (A) 2006 (B) 2013 (C) 2016 (D) 2226 (E) 2229

6. De zijden van een vierkant worden onderverdeeld in een aantal stukken met lengten zoals in de figuur. Wat is de oppervlakte van het gearceerde gedeelte?



- (A) 192 (B) 200 (C) 208 (D) 212 (E) 218

7. Als $\frac{a+b}{2} = r$ en $\sqrt{ab} = m$ met $ab > 0$, dan is $a^3 + b^3$ gelijk aan

- (A) $8r^3 - 6rm^2$ (B) $8r^3 + 6rm^2$ (C) $8r^3 - 3rm^2$
 (D) $8r^3 - 6r^2m$ (E) $4r^3 - 2rm^2$

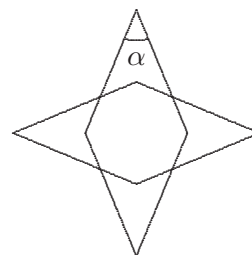
8. Hoeveel gehele waarden van k bestaan er waarvoor de vergelijking

$$|x^2 - 2| = k$$

meer dan twee oplossingen heeft in \mathbb{R} ?

- (A) geen enkele (B) 1 (C) 2
 (D) 3 (E) oneindig veel

9. Twee congruente ruiten waarvan de assen dezelfde dragers hebben snijden elkaar, zodat hun doorsnede een regelmatige achthoek is (zie figuur). Bepaal de scherpe hoek α .



- (A) $30^\circ < \alpha < 35^\circ$ (B) $35^\circ < \alpha \leq 40^\circ$ (C) $40^\circ < \alpha \leq 45^\circ$
 (D) $45^\circ < \alpha \leq 50^\circ$ (E) $50^\circ < \alpha \leq 60^\circ$

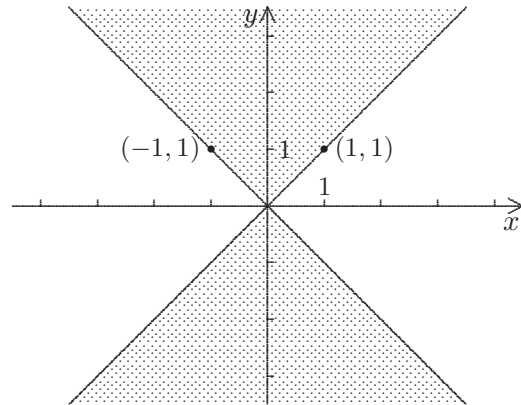
10. De McCarthy-functie $M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ wordt gedefinieerd als

$$\begin{aligned} M(n) &= n - 10 && \text{als } n > 100 \\ M(n) &= M(M(n + 11)) && \text{als } n \leq 100 \end{aligned}$$

Dan is $M(0)$

- (A) -10 (B) 100 (C) 90
 (D) 91 (E) niet te bepalen uit de gegevens

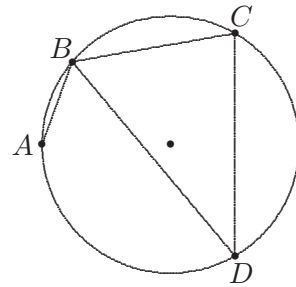
11. In het gearceerde gebied liggen alle oplossingen van



- (A) $x^2 < y^2$ (B) $|x| > |y|$ (C) $|y| > x^2$ (D) $y > x$ (E) $x^2 > y^2$

12. In een cirkel zijn de volgende bogen afgepast:

$\widehat{AB} = 40^\circ$, $\widehat{BC} = 80^\circ$ en $\widehat{CD} = 120^\circ$. Dan geldt voor de koorden:



- (A) $|AB| + |BC| = |CD|$ (B) $|AB| + |BC| = |BD|$
 (C) $|AB| + |CD| = |BD|$ (D) $|AB| + |BD| = |BC| + |CD|$
 (E) geen van de vorige

13. Zij $p(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ zodat $p(i) = i, \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Welke van volgende uitspraken is dan correct?

- (A) $p(6) = 0$ (B) $p(6) = 6$ (C) $6 < p(6) < 100$
 (D) $p(6) = 100$ (E) $p(6) > 100$

14. Beschouw de reële functies: $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$; $g : x \mapsto \frac{x^2}{x^4 + 1}$; $h : x \mapsto \frac{x}{x^3 + 1}$; $m : x \mapsto x \cdot |x|$. Van deze vier functies zijn er precies

- (A) twee even, twee oneven (B) twee even, één oneven
 (C) twee oneven, één even (D) één even, drie oneven
 (E) één even, één oneven

15. Wat is de grootste waarde van $\sin^2 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^2 x$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) $\frac{5}{4}$ (E) $\frac{3}{2}$

16. Drie positieve getallen x , y en z voldoen aan het stelsel

$$\begin{cases} x^2 + y^3 + z^4 = 13 \\ x^2 - y^3 + z^4 = 11 \\ x^2 + y^3 - z^4 = 5 \end{cases}$$

Het product xyz is dan gelijk aan

(A) 4	(B) 9	(C) 16	(D) 27	(E) 32
-------	-------	--------	--------	--------

17. Hoeveel natuurlijke getallen n bestaan er die ervoor zorgen dat het kwadraat van

$$\sqrt{7 + \sqrt{n}} + \sqrt{7 - \sqrt{n}}$$

geheel is?

(A) 4	(B) 5	(C) 6	(D) 7	(E) 8
-------	-------	-------	-------	-------

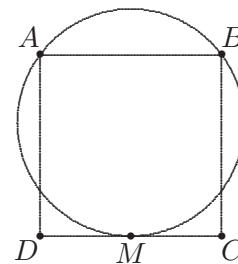
18. Hoeveel natuurlijke getallen n zijn er zodat $n + 18$ een deler is van $n + 53$?

(A) 0	(B) 1	(C) 2
(D) 3	(E) oneindig veel	

19. Als G het kleinste natuurlijk getal is waarvan de som van de cijfers gelijk is aan 2006, dan is de som van het begin- en eindcijfer van G gelijk aan

(A) 1	(B) 2	(C) 9	(D) 17	(E) 18
-------	-------	-------	--------	--------

20. Een cirkel met straal r gaat door de hoekpunten A en B van het vierkant $ABCD$ en raakt in het punt M aan de zijde $[CD]$. De oppervlakte van dit vierkant is gelijk aan



(A) $\frac{9r^2}{4}$	(B) $\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)r^2$	(C) $\frac{36r^2}{25}$
(D) $\frac{64r^2}{25}$	(E) $4r^2$	

21. Gegeven vijf puntendrietalen. Van precies vier van deze puntendrietalen liggen de drie punten op een rechte. Welk drietal heeft die eigenschap niet?

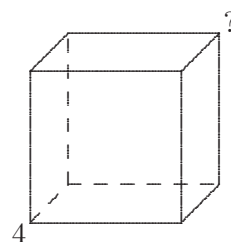
(A) ABE	(B) ACD	(C) ADF	(D) BCF	(E) DEF
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

26. Nonkel Frank houdt ezels, schapen en geiten. De vraag “Hoeveel ezels, schapen en geiten heb je?” beantwoordt nonkel Frank met de volgende bedenkingen: “Als de helft van mijn schapen ezels zouden zijn, had ik dubbel zoveel geiten als ezels. Als de helft van mijn ezels geiten zouden zijn, dan zou ik 5 geiten meer hebben dan schapen. Als de helft van mijn geiten schapen zouden zijn, had ik 7 keer zoveel schapen als ezels”.

Hoeveel ezels heeft nonkel Frank?

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5
-------	-------	-------	-------	-------

27. De cijfers van 0 tot en met 7 worden op de hoekpunten van een kubus geplaatst op zulke manier dat de som van twee cijfers aan dezelfde ribbe steeds een priemgetal is. Welk cijfer staat er dan op de plaats van het vraagteken (diagonaal tegenover het cijfer 4)?

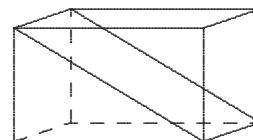


(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 5	(E) 6
-------	-------	-------	-------	-------

28. In driehoek ABC is $|AC| = 3$ en $|AB| = 6$. De grootst mogelijke hoek B bedraagt

(A) 30°	(B) 45°	(C) 60°
(D) 90°	(E) meer dan 90°	

29. Een balk heeft drie ribben met verschillende lengte: 3, 4 en 5. Het aantal diagonaalvlakken (vierhoeken door evenwijdige ribben die niet in eenzelfde zijvlak liggen) dat een vierkant is, is gelijk aan



(A) 0	(B) 1	(C) 2
(D) 4	(E) geen van de vorige	

30. Twee verliefden proberen elkaar dagelijks te ontmoeten voor een innige omhelzing. Beiden komen lukraak aan tussen 18:00 en 19:00 uur op een afgesproken plaats. Afgesproken is ook om hoogstens 15 minuten te wachten op de ander. Hoe groot is de kans op een omhelzing?

(A) $\frac{3}{8}$	(B) $\frac{7}{16}$	(C) $\frac{1}{2}$	(D) $\frac{9}{16}$	(E) $\frac{5}{8}$
-------------------	--------------------	-------------------	--------------------	-------------------