1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 2004-2005: tweede ronde

De tweede ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem werkt als volgt: per goed antwoord krijgt de deelnemer 5 punten, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 1 punt en een foutief antwoord wordt als 0 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 2 uur.

1. Hoeveel eerstegraadsfuncties zijn er die het interval $[1, 3]$ afbeelden op het interval $[-1, 2]$?

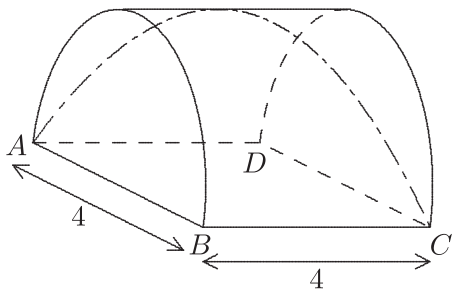
(A) 0	(B) 1
(C) 2	(D) meer dan 2 maar eindig
(E) oneindig	

2. Indien alle lieve mensen blond zijn, hoeveel van volgende uitspraken zijn dan juist?

   (a) De mensen die niet blond zijn, zijn niet lief.
   (b) De mensen die niet lief zijn, zijn niet blond.
   (c) De mensen die lief zijn, zijn blond.
   (d) De mensen die niet blond zijn, zijn lief.
   (e) De blonde mensen zijn lief.

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

3. We beschouwen een halve cilinder met diameter 4 cm en hoogte 4 cm (zie figuur). Wat is de lengte in centimeter van de kortste afstand van A tot C langs de mantel?



(A) $4\sqrt{2}$	(B) $2\pi + 2$	(C) $4(\pi + 1)$
(D) $\sqrt{4\pi^2 + 16}$	(E) $\sqrt{16\pi^2 + 16}$	

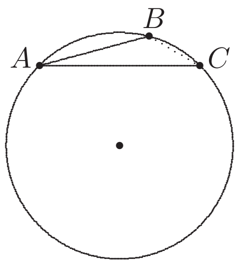
4. Als $a = 2^{2005} + 2^{-2005}$ en $b = 2^{2005} - 2^{-2005}$, dan is $a^2 - b^2$ gelijk aan

(A) 1	(B) 2	(C) 4
(D) 2005	(E) geen van de vorige	

5. Op een zonnige dag genieten 8 personen op een terras van een drankje: ofwel 1 koffie, ofwel 1 pils, ofwel 1 blonde trappist. De prijzen zijn respectievelijk 1,40 euro, 1,60 euro en 2 euro. De totale rekening bedraagt 14,60 euro. Hoeveel personen hebben een blonde trappist gedronken?

(A) 2	(B) 3	(C) 4	(D) 5	(E) 6

6. Uit een punt A op een cirkel trekt men de zijde $[AB]$ van een ingeschreven regelmatige 6-hoek en de zijde $[AC]$ van een ingeschreven regelmatige 4-hoek zodanig dat $\widehat{BAC}$ scherp is (zie figuur). Dan is het lijnstuk $[BC]$ de zijde van een regelmatige ingeschreven



(A) 8-hoek	(B) 10-hoek	(C) 12-hoek	(D) 15-hoek	(E) 24-hoek

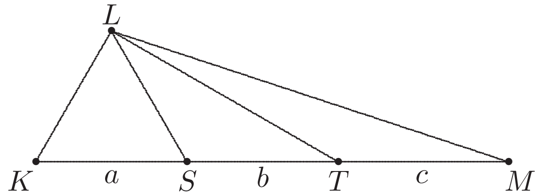
7. Welk getal is de mediaan van de volgende vijf getallen?

(A) $1000!$	(B) $500!\,500!$	(C) $600!\,400!$	(D) $700!\,300!$	(E) $800!\,200!$

8. Als $x^2 - 11x + 32 = 0$, hoeveel is dan $x^4 - 22x^3 + 121x^2 + 2005$?

(A) 3029	(B) 3092	(C) 3209	(D) 3290	(E) 3902

9. In een driehoek KLM is $\hat{K} = 60°$ en $\hat{L} = 105°$. Beschouw S en T op $[KM]$ zodat $\widehat{KLS} = 60°$ en $\widehat{KLT} = 90°$.



Noem $|KS| = a$, $|ST| = b$ en $|TM| = c$. Dan geldt

(A) $a < b < c$	(B) $a = b < c$	(C) $b < a < c$
(D) $b < c = a$	(E) $a = b = c$	

10. Men noteert $x^+ = \max\{0, x\}$. Dan geldt voor elk reëel getal x dat $|x|$ gelijk is aan

(A) $(-x)^+ - x^+$	(B) $x^+ - (-x)^+$	(C) $x^+ + (-x)^+$
(D) $\dfrac{x^+ - (-x)^+}{2}$	(E) $\dfrac{x^+ + (-x)^+}{2}$	

11. De verhouding van de diagonaal van een rechthoek (die geen vierkant is) tot de langste zijde van die rechthoek kan alle mogelijke waarden doorlopen van het interval

(A) $[1, +\infty[$	(B) $]1, +\infty[$	(C) $[1, \sqrt{2}[$	(D) $]1, \sqrt{2}]$	(E) $]1, \sqrt{2}[$

12. Wat is de honderdste term in de rij

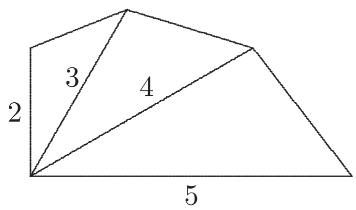
$$|-1|, \quad \Big||-1|-2\Big|, \quad \Big|\Big||-1|-2\Big|-3\Big|, \quad \Big|\Big|\Big||-1|-2\Big|-3\Big|-4\Big|, \; \ldots ?$$

(A) 50	(B) 52	(C) 99	(D) 100	(E) 5050

13. Als men het aantal inwoners van het Afrikaans dorpje Ababa kwadrateert, verkrijgt men een getal van vijf cijfers dat men kan schrijven als *ababa*. Als je weet dat $3a = 2b$, hoeveel inwoners telt Ababa dan?

(A) tussen 100 en 150	(B) tussen 150 en 200
(C) tussen 200 en 250	(D) tussen 250 en 300
(E) tussen 300 en 350	

14. Door een rechte hoek in drie gelijke delen te verdelen en op de opeenvolgende benen, vanaf het hoekpunt, respectievelijk lengten af te passen van 2, 3, 4 en 5 (zie figuur), ontstaan drie driehoeken waarvan de oppervlakten (van klein naar groot) zich verhouden als



(A) $2:3:4$	(B) $3:4:5$	(C) $3:6:10$	(D) $4:9:16$	(E) $9:16:25$

15. Als x, y en $z > 0$ en $xyz = 1$, dan is

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+xz}$$

gelijk aan

(A) $\dfrac{x+y+z}{3}$	(B) 1	(C) $\dfrac{3}{2}$
(D) 2	(E) $\dfrac{xy+yz+zx}{3}$	

16.

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} \quad \text{is gelijk aan}$$

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

17. De maximumwaarde van $\dfrac{1}{x^2 - 4x + 7}$ is gelijk aan

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) $\dfrac{1}{2}$	(E) $\dfrac{1}{3}$

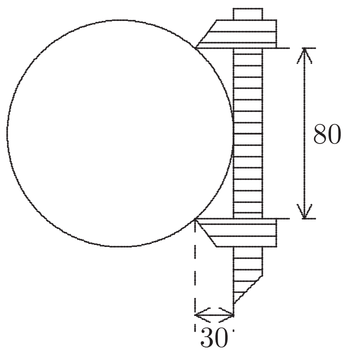
18. Een fotograaf zal een familiefoto maken van de acht leden van het gezin Van Paemel, die allen een verschillende lichaamslengte hebben. Hij wil hiervoor deze acht personen in twee rijen van vier plaatsen, zodat in beide rijen de lichaamslengte toeneemt van links naar rechts en zodat achter elke persoon op de eerste rij een grotere persoon plaatsneemt. Op hoeveel manieren kan hij de gezinsleden plaatsen?

(A) 14	(B) 16	(C) 18	(D) 20	(E) 22

19. Als A het getal is dat bestaat uit 200 cijfers 1 en B het getal is dat bestaat uit 100 cijfers 2, dan is $\sqrt{A - B}$ opnieuw een getal dat uit allemaal dezelfde cijfers bestaat. Wat is dat cijfer?

(A) 3	(B) 4	(C) 5	(D) 6	(E) 7

20. Een aannemer wil de diameter van een koperen buis meten vooraleer hij verder kan werken. Hij neemt hiervoor een schuifpasser maar de diameter van de buis ligt buiten het bereik van de schuifpasser (zie figuur).
De diameter van de buis is gelijk aan

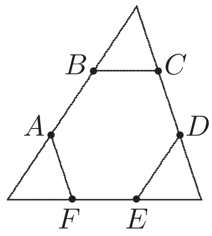


(A) 80	(B) $\dfrac{250}{3}$	(C) 90	(D) 100	(E) $\dfrac{250}{\sqrt{3}}$

21. Het Japanse ijshockeyteam ISHOMO bestaat uit zes spelers. Wanneer men de spelers één voor één weegt en telkens het gemiddeld gewicht bepaalt van de spelers die reeds gewogen zijn, blijkt dit gemiddeld gewicht telkens met twee kilogram toe te nemen. Hoeveel kilogram weegt de zwaarste speler meer dan de lichtste?

(A) 12	(B) 14	(C) 18	(D) 20	(E) 21

22. In een driehoek met oppervlakte 1 verdelen de punten A, B, C, D, E en F de zijden in drie gelijke delen (zie figuur). Wat is de oppervlakte van de zeshoek $ABCDEF$?



(A) $\frac{1}{2}$	(B) $\frac{7}{12}$	(C) $\frac{2}{3}$	(D) $\frac{5}{6}$	(E) $\frac{3}{4}$

23. De rij 3, 15, 24, 48, ... bestaat uit de positieve gehele veelvouden van 3 die 1 kleiner zijn dan het kwadraat van een natuurlijk getal.
Als men de 2005-de term uit deze rij deelt door 1000, dan is de rest gelijk aan

(A) 61	(B) 62	(C) 63	(D) 64	(E) 65

24. Gegeven een functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gedefiniëerd door

$$f(0) = 1, \quad f(n) = f(n-1) + n \quad (n > 0)$$

dan is $f(n)$ gelijk aan

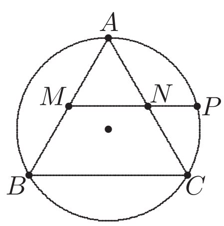
(A) $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$	(B) $n^2 + n + 1$	(C) $2n^2 - n + 1$
(D) $n^2 - 2n + 1$	(E) $\frac{1}{2}n(n+1)$	

25. Hoeveel van de zeven hoeken 0 rad, 1 rad, 2 rad, ..., 6 rad voldoen aan

$$\sin 2x > 2 \sin x?$$

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) geen enkele

26. Een gelijkzijdige driehoek ABC is ingeschreven in een cirkel met straal 1. M is het midden van $[AB]$ en N het midden van $[AC]$. MN snijdt de cirkel in P (zie figuur). Dan is $|NP|$ gelijk aan



(A) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{4}$	(B) $\frac{1}{2}$	(C) $1 - \frac{\sqrt{3}}{4}$
(D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$	(E) $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$	

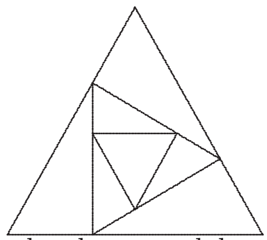
27. Eén van volgende verzamelingen bevat de enige gehele nulwaarde van de functie

$$f(x) = x^5 + 20x^4 + 44x^3 + 148x^2 + 90x + 324$$

Welke?

(A) $\{-15, -1, 12, 18\}$	(B) $\{-324, -3, 6, 54\}$	(C) $\{-81, -24, 4, 36\}$
(D) $\{-72, -27, 3, 162\}$	(E) $\{-54, -18, 0, 5\}$	

28. In een gegeven gelijkzijdige driehoek construeert men een nieuwe gelijkzijdige driehoek, waarvan de hoekpunten zich bevinden op de zijden van de gegeven driehoek in punten die deze zijden verdelen in een verhouding van 1 tot 2. Vervolgens doet men dezelfde operatie op de geconstrueerde driehoek en zo steeds verder.



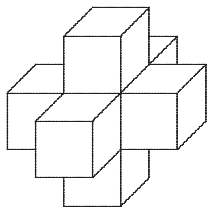
Hoeveel driehoeken heeft men geconstrueerd op het moment dat de oppervlakte van de laatste kleiner is dan 1/1000 van de oppervlakte van de gegeven driehoek? (De gegeven driehoek wordt niet meegeteld.)

(A) 5	(B) 6	(C) 7	(D) 8	(E) 9

29. Het aantal snijpunten van de grafieken van $f(x) = \sin(2\pi x)$ en $g(x) = \dfrac{x}{2005}$ bedraagt

(A) 2005	(B) 4010	(C) 8019
(D) 8020	(E) oneindig veel	

30. Op elk zijvlak van een kubus met ribbe 2 wordt een congruente kubus geplakt, zodat een lichaam bestaande uit zeven kubussen ontstaat. Bepaal de straal van de kleinste bol welke dit lichaam omvat.



(A) 3	(B) $\sqrt{10}$	(C) $\sqrt{11}$	(D) $\sqrt{13}$	(E) $\sqrt{26}$