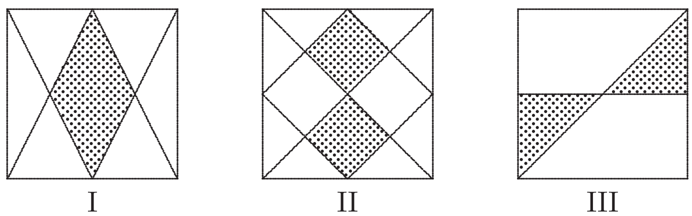
1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 2003-2004: tweede ronde

De tweede ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem werkt als volgt: per goed antwoord krijgt de deelnemer 5 punten, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 1 punt en een foutief antwoord wordt als 0 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 2 uur.

1. Hoeveel natuurlijke getallen van twee cijfers zijn gelijk aan het dubbel van de som van hun cijfers?

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

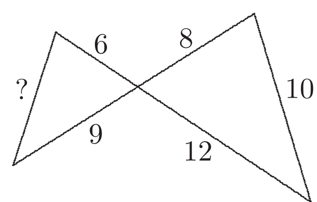
2. In drie congruente vierkanten werden lijnstukken getekend die hoekpunten en middens van zijden onderling verbinden (zie figuur).



Hoe verhouden zich de oppervlakten van de gearceerde gebieden I, II en III?

(A) Ze zijn alledrie gelijk. (B) Enkel I en II zijn gelijk.
(C) Enkel I en III zijn gelijk. (D) Enkel II en III zijn gelijk.
(E) Ze zijn alle drie verschillend.

3. De ontbrekende lengte in bijgaande tekening is

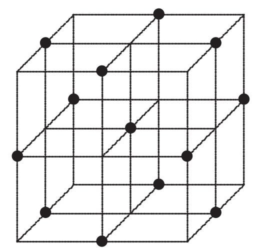


(A) 5	(B) 7,5	(C) 8	(D) 8,5	(E) 10

4. Hoeveel jaartallen zijn er in de 21$^{\text{ste}}$ eeuw waarvan de som van de cijfers 6 is?

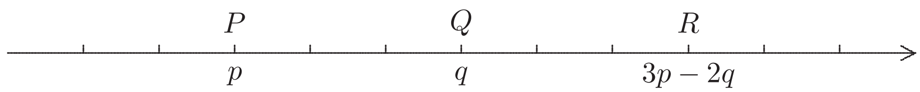
(A) 5	(B) 10	(C) 15	(D) 20	(E) 25

5. Een scheikundeleraar wil de atoomstructuur van natriumchloride (keukenzout) voorstellen door middel van een model van ijzerdraad dat de vorm heeft van een kubus die verdeeld is in 8 kleinere kubussen (zoals in de figuur). Als de ribbe van de grote kubus 30 cm is, hoeveel meter ijzerdraad heeft de leraar dan nodig?



(A) 2,7	(B) 5,4	(C) 7,2	(D) 8,1	(E) 14,4

6. Op onderstaande getallenas is p de abscis van het punt P, q ($\neq p$) de abscis van het punt Q en $3p - 2q$ de abscis van het punt R.



Dan ligt de oorsprong O

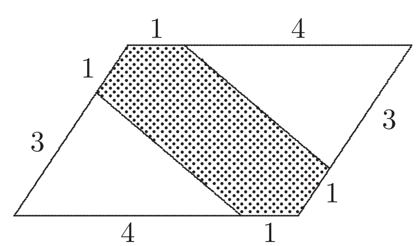
(A) links van P.	(B) tussen P en Q.	(C) tussen Q en R.
(D) rechts van R.	(E) de voorgestelde situatie is onmogelijk.	

7.

$$\frac{1 + \cot 2004^\circ}{1 + \tan 2004^\circ} =$$

(A) 1	(B) $\tan 2004^\circ$	(C) $\tan^2 2004^\circ$
(D) $\cot 2004^\circ$	(E) $\cot^2 2004^\circ$	

8. Nonkel Omer heeft een tuintje in de vorm van een parallellogram (zie figuur). Tijdens nachtelijke manoeuvers rijdt een soldaat met zijn tank over het tuintje en verwoest daardoor het gearceerde gebied. Welk percentage van de oppervlakte van de tuin werd vernield?



(A) 22,5%	(B) 25%	(C) 33,3%	(D) 40%	(E) 50%

9. Als

$$2a^2 + 2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0 \text{ met } a, b \in \mathbb{R}$$

dan is het product $a \cdot b$ gelijk aan

(A) $-0{,}5$	(B) $-0{,}25$	(C) 0,25	(D) 0,5	(E) 1

10. Als

$$f(x, y) = \frac{x^2(x - y^2)}{x^3 - y^3}$$

dan is $f(y, x) =$

(A) $1 + f(x, y)$	(B) $1 - f(x, y)$	(C) $-f(x, y)$
(D) $\dfrac{1}{1 - f(x, y)}$	(E) $1 + \dfrac{1}{f(x, y)}$	

11. Veronderstel dat $ax^2 + 2bx + c = 0$ (a, b, $c \in \mathbb{R}_0$) twee gelijke wortels heeft. Welke van de volgende uitspraken is dan steeds correct?

(A) a, b, c zijn onderling verschillend
(B) a, b, c zijn strikt negatieve getallen
(C) $b < 0$, $a > 0$, $c > 0$
(D) a, b, c zijn opeenvolgende termen van een rekenkundige rij
(E) a, b, c zijn opeenvolgende termen van een meetkundige rij

12. Wat is fout?
Het stelsel $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (x - a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ kan (naargelang de waarde van het reëel getal a)

(A) precies één oplossing hebben.	(B) precies twee oplossingen hebben.
(C) precies drie oplossingen hebben.	(D) precies vier oplossingen hebben.
(E) geen oplossing hebben.	

13. Stel

$$r = \text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}, \quad s = \text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \text{ en } t = \text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

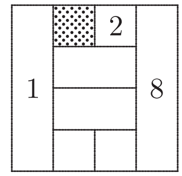
Dan geldt

(A) als $r = 2$ en $s = 2$ dan is $t = 3$.	(B) als $r = 2$ en $s = 2$ dan is $t = 2$.
(C) als $r = 2$ en $s = 1$ dan is $t = 1$.	(D) als $r = 1$ en $s = 1$ dan is $t = 2$.
(E) als $r = 1$ en $s = 1$ dan is $t = 1$.	

14. Het natuurlijk getal n is het kleinste dat bij deling door 2 rest 1, bij deling door 3 rest 2, bij deling door 4 rest 3, bij deling door 5 rest 4 en bij deling door 6 rest 5 oplevert. De rest van de deling van n door 7 is

(A) 0	(B) 1	(C) 3	(D) 5	(E) 6

15. Als de cijfers 1 tot en met 8 in de vakjes worden ingevuld zodat twee opeenvolgende cijfers nooit in aangrenzende vakjes staan, welk cijfer komt dan in het gearceerd vakje?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

16. Kies willekeurig een natuurlijk getal. Hoe groot is de kans dat de vierdemacht ervan eindigt op 6?

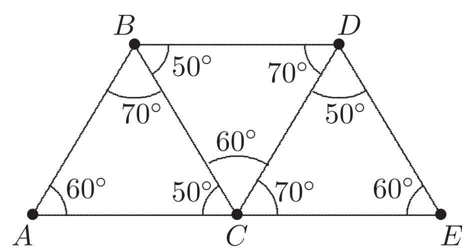
(A) 0 (B) $\frac{1}{10}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$ (E) $\frac{1}{2}$

17.

$$\frac{95\,122 \times 111\,171\,537}{542\,697 + 514\,789} =$$

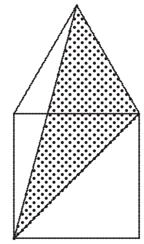
(A) 9 999 999 (B) 99 999 999 (C) 999 999 999
(D) 9 999 999 999 (E) 99 999 999 999

18. Een trapezium wordt verdeeld in drie gelijkvormige driehoeken $\triangle ABC$, $\triangle BCD$ en $\triangle CDE$ met hoeken zoals aangeduid op de figuur. Dan geldt:



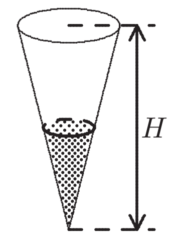
(A) $|CE| < |BD| < |AC|$ (B) $|CE| < |AC| < |BD|$
(C) $|BD| < |AC| < |CE|$ (D) $|AC| < |BD| < |CE|$
(E) $|BD| < |CE| < |AC|$

19. Een gelijkzijdige driehoek heeft een zijde gemeen met een zijde van een vierkant (zie figuur). Als men twee lijnstukken bijtekent ontstaat de gearceerde driehoek. De verhouding van de grootste tot de kleinste hoek van de gearceerde driehoek is



(A) 3 (B) 3,5 (C) 4 (D) 4,5 (E) 5

20. Een kegelvormig glas wordt tot op halve hoogte gevuld met 2 cl wijn (zie figuur). Hoeveel cl moet er worden bijgegoten om het te vullen tot het glas half vol is qua volume?



(A) 1 cl	(B) 2 cl	(C) 4 cl	(D) 6 cl	(E) 8 cl

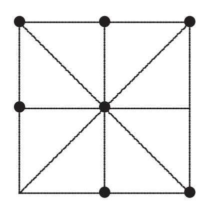
21. Op drie kaarten staat telkens een ander strikt positief geheel getal. De som van deze getallen is 13. Op de eerste kaart staat het kleinste getal, op de derde kaart het grootste. Drie juryleden van de VWO (en die zijn uiterst intelligent en altijd eerlijk) zitten samen rond een tafel.

- Ellen ziet het getal op de eerste kaart en zegt: “Hieruit kan ik niet afleiden wat op de andere kaarten staat.”
- Daarna ziet Eddy het getal op de derde kaart en zegt: “Hieruit kan ik niet afleiden wat op de andere kaarten staat.”
- Tenslotte ziet Daniël het getal op de tweede kaart en zegt: “Hieruit kan ik niet afleiden wat op de andere kaarten staat.”

Welk getal staat er op de tweede kaart?

(A) 2	(B) 3	(C) 4	(D) 5	(E) 6

22. Zeven punten bevinden zich in het vlak zoals in de figuur aangeduid. Hoeveel verschillende driehoeken kunnen worden gevormd met drie van deze punten als hoekpunten?



(A) 6	(B) 14	(C) 28	(D) 32	(E) 35

23. In de kast staat een volle doos met suikerklontjes, mooi geordend. Op een nacht eten de muizen de bovenste laag helemaal op; dat zijn er 88. De volgende nacht eten de muizen een laag aan de zijkant helemaal op; dat zijn er 77. De derde nacht eten de muizen een laag aan de voorzijde helemaal op; dat zijn er

(A) 49	(B) 55	(C) 56	(D) 64	(E) 66

24. In een rechthoekige driehoek meet de schuine zijde 13 cm en de hoogte op de schuine zijde 6 cm. Dan is de som van de lengten van de twee rechthoekszijden van deze driehoek gelijk aan

(A) 13 cm	(B) 17 cm	(C) $\sqrt{247}$ cm	(D) $5\sqrt{13}$ cm	(E) 19 cm

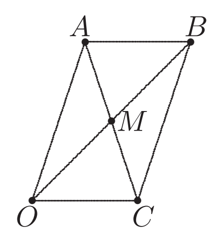
25. Als

$$\log(\log x) + \log(\log y) = \log(\log z)$$

waarbij x, y, z drie reële getallen zijn groter dan 1, dan is z gelijk aan

(A) $x + y$	(B) $x \cdot y$	(C) $\log x \cdot \log y$
(D) x^y	(E) $x^{\log y}$	

26. Beschouw het parallellogram $OABC$ in het vlak met oorsprong O. M is het middelpunt van $OABC$. Er geldt dan

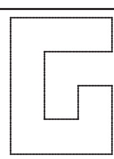
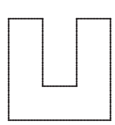
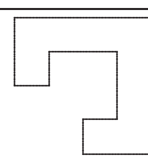
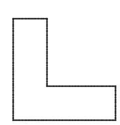
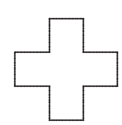


(A) $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{C} - \vec{A})$	(B) $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$
(C) $\vec{M} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$	(D) $\vec{M} = \frac{1}{4}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$
(E) $\vec{M} = \frac{1}{2}\,\vec{C}$	

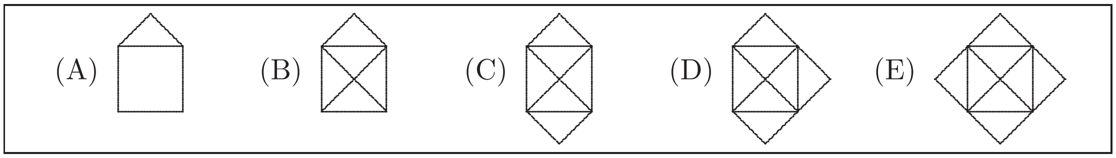
27. Als $a = 2$; $b = a - 1$; $c = a + b - 1$; $d = a + b + c - 1$; $\ldots$; $z = a + b + c + \ldots + y - 1$; dan is $z =$

(A) 1	(B) 2^2	(C) 4^4	(D) 8^8	(E) 16^{16}

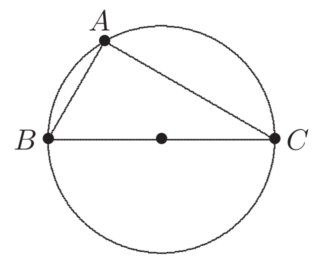
28. Onder vlakvulling verstaan we een manier om het hele vlak op te vullen met onderling congruente figuren die mekaar niet overlappen. Met welke van de volgende figuren kan men geen vlakvulling maken?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

29. Welke figuur kan niet, zonder een lijnstuk dubbel te tekenen, in één pennentrek worden gemaakt?



30. Een punt A van een cirkel met straal 7 wordt verbonden met de uiteinden B en C van een middellijn, waarbij $|AC| = 11$. Hoe lang is $[AB]$?



(A) 4	(B) 7	(C) 7,5	(D) $6\sqrt{2}$	(E) $5\sqrt{3}$