1 Vlaamse Wiskunde Olympiade: tweede ronde

De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem werkt als volgt: per goed antwoord krijgt de deelnemer 5 punten, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 1 punt en een foutief antwoord wordt als 0 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 2 uur.

1.1 De problemen

1. Hoeveel volkomen kwadraten liggen er tussen 5^4 en 4^5?

(A) 2	(B) 3	(C) 4	(D) 5	(E) meer dan 5

2. Een rechthoek heeft een zijde met lengte a en een diagonaal met lengte $2a$. Hoe groot is zijn oppervlakte?

(A) a^2	(B) $a^2\sqrt{a}$	(C) $a^2\sqrt{3}$	(D) $2a^2$	(E) $a^2\sqrt{5}$

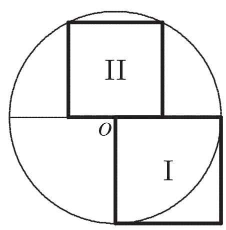
3. Laurien, Lennert en Lisanne gingen vogels observeren. Elk van hen zag één vogel die geen van de anderen zag. Elk van hen zag één vogel niet, die beide anderen wel zagen. En één vogel zagen ze alledrie. Van de vogels die Laurien zag, waren er twee geel. Van de vogels die Lennert zag, waren er drie geel. Van de vogels die Lisanne zag, waren er vier geel.
Hoeveel gele vogels werden er geobserveerd?

(A) 5	(B) 6	(C) 7	(D) 8	(E) 9

4. Hoeveel gehele oplossingen heeft de ongelijkheid $\sqrt{x+2} > x$?

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

5. Vierkant I heeft twee zijden die samenvallen met de stralen van een cirkel en vierkant II heeft twee hoekpunten op dezelfde cirkel en twee op de middellijn van die cirkel (zie figuur).
De verhouding van de oppervlakte van vierkant I tot de oppervlakte van vierkant II is



(A) 1	(B) 1,2	(C) 1,25	(D) $\sqrt{2}$	(E) 1,5

6. Een regelmatige 100-hoek bezit n diagonalen.
Hoeveel diagonalen meer heeft een regelmatige 101-hoek?

(A) 98	(B) 99	(C) 100	(D) 101	(E) 102

7. Een gelijkzijdige driehoek met zijde a wordt gewenteld om een as door één van zijn hoekpunten, evenwijdig met de overstaande zijde.
Bepaal het beschreven volume.

(A) $\pi a^3 \dfrac{\sqrt{3}}{12}$	(B) $\dfrac{1}{4}\pi a^3$	(C) $\dfrac{1}{3}\pi a^3$	(D) $\dfrac{1}{2}\pi a^3$	(E) πa^3

8. Op een avond rijdt Frederik de 100 km van zijn werk naar huis met een gemiddelde snelheid van 120 km/h. Hij gaat daarna tanken in het benzinestation om de hoek en dat duurt 4 minuten. Zijn vrouw Veerle rijdt die avond ook 100 km van haar werk naar huis, waarvan 80 km met een gemiddelde snelheid van 120 km/h. Over een strook van 20 km duwt ze het gaspedaal stevig in en rijdt ze 140 km/h. Ten slotte gaat ook zij tanken in het benzinestation om de hoek maar heeft daar 6 minuten voor nodig.
Als Frederik en Veerle gelijktijdig vertrekken, hoeveel minuten zal Veerle dan eerder thuis zijn dan Frederik?

(A) 1	(B) 2	(C) 3
(D) 4	(E) Frederik zal als eerste thuiskomen.	

9. Een rechte d met richtingscoëfficiënt 2 snijdt de y-as in $(0,1)$.
Door de rechte d te spiegelen t.o.v. de x-as krijgt men een tweede rechte.
Door de rechte d te spiegelen t.o.v. de y-as krijgt men een derde rechte.
Door de rechte d te spiegelen t.o.v. de eerste bissectrice krijgt men een vierde rechte.

Welke van de volgende vergelijkingen is NIET de vergelijking van één van deze vier rechten?

(A) $y = 2x + 1$	(B) $y = -2x + 1$	(C) $y = 2x - 1$
(D) $y = -2x - 1$	(E) $y = \dfrac{1}{2}(x - 1)$	

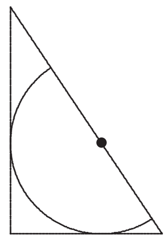
10. Hoeveel uitspraken over de reële nulpunten van $x^7 + x + 1$ zijn juist?
    I. Ze zijn alle positief.
    II. Minstens één is positief.
    III. Ze zijn alle negatief.
    IV. Ze zijn alle begrepen tussen -1 en 0.
    V. Er zijn precies vier verschillende reële nulpunten.

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

11. In een rechthoekige driehoek verdeelt de bissectrice van een scherpe hoek α de overstaande zijde in twee delen waarvan het grootste zich verhoudt tot het kleinste als 1 tot

(A) $\cos\alpha$	(B) $\sin\alpha$	(C) $\tan\dfrac{\alpha}{2}$	(D) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$	(E) $\cos\dfrac{\alpha}{2}$

12. In een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 4 en 6, construeert men een halve cirkel met middelpunt op de schuine zijde en rakend aan de rechthoekszijden.
Wat is de straal van deze cirkel?



(A) 2	(B) 2,4	(C) 2,5	(D) 3	(E) $\dfrac{2}{3\sqrt{13}}$

13. De grafiek van de functie met voorschrift

$$f(x) = \frac{4x}{x - |x|}$$

t.o.v. een rechthoekig assenstelsel bestaat uit

(A) twee halfrechten, niet evenwijdig.
(B) twee evenwijdige halfrechten (niet gelegen op dezelfde rechte).
(C) één halfrechte evenwijdig met de x-as.
(D) één halfrechte niet evenwijdig met de assen.
(E) één rechte waaruit 1 punt is weggenomen.

14. Als we het stelsel

$$\begin{cases} x^3y^4 & = & a \\ x^5y^6 & = & b \end{cases} \qquad a \cdot b > 0$$

oplossen in $\mathbb{R}^2$, vinden we dat $x =$

(A) $\dfrac{b^2}{a^3}$	(B) $\dfrac{2b}{3a}$	(C) $\sqrt{\dfrac{a^5}{b^3}}$	(D) $b^2 - a^2$	(E) $2b - 3a$

15. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |\cos x| + \cos|x|$

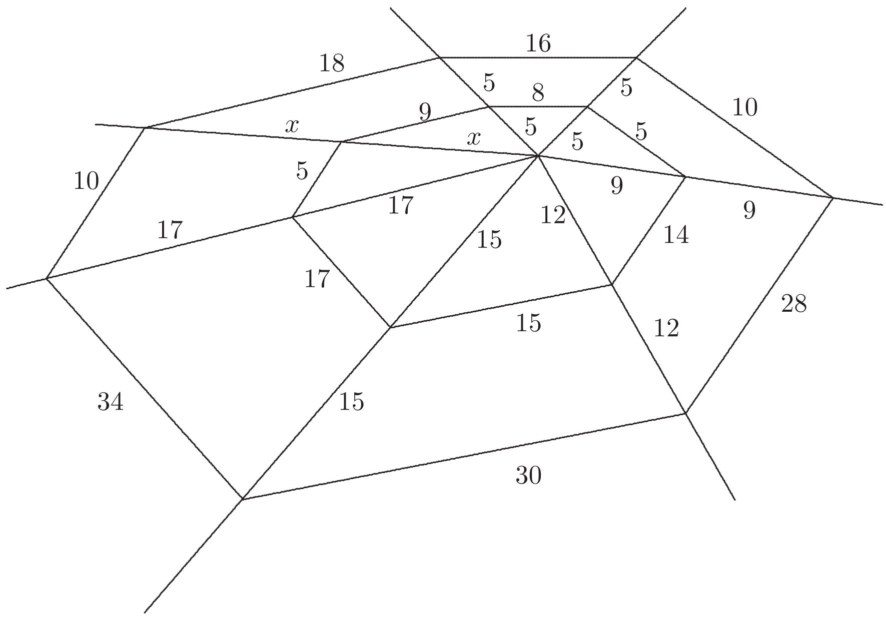
(A) is periodiek met periode $\frac{\pi}{4}$. (B) is periodiek met periode $\frac{\pi}{2}$.
(C) is periodiek met periode π. (D) is periodiek met periode 2π.
(E) is niet periodiek.

16.

$$2003 - 2001 + 1999 - \ldots - 5 + 3 - 1 =$$

(A) 2	(B) 1000	(C) 1002	(D) 1020	(E) 2004

17. Een wiskundig geschoolde spin spon een web waarbij de lengte van alle draden een geheel getal is (zoals aangegeven in de figuur).



Bepaal x.

(A) 11	(B) 13	(C) 15	(D) 17	(E) 19

18. Wat is het laatste cijfer van het product $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots 2001 \cdot 2003$?

(A) 1	(B) 3	(C) 5	(D) 7	(E) 9

19. Als je weet dat

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

bepaal dan

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \ldots$$

(A) $\frac{\pi^2}{7}$	(B) $\frac{\pi^2}{8}$	(C) $\frac{\pi^2}{9}$	(D) $\frac{\pi^2}{10}$	(E) $\frac{\pi^2}{12}$

20. De rest van de deling van $(1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + 7! + 8! + 9!)^2$ door 5 is
($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$; b.v. $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$)

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

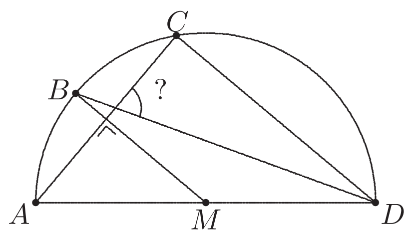
21. Op de planeet Quaternion rekent men met onze reële getallen en de gewone vermenigvuldiging, maar ook nog met drie symbolen i, j en k die op de volgende manier worden vermenigvuldigd:

$$i \cdot i = -1;\ j \cdot j = -1;\ k \cdot k = -1;\ i \cdot j = k;\ j \cdot k = i;\ k \cdot i = j.$$

Als je bovendien weet dat de vermenigvuldiging op Quaternion associatief maar niet commutatief is, wat is dan $k \cdot j \cdot i$?

(A) 1	(B) -1	(C) i	(D) j	(E) k

22. In de figuur is AD middellijn van een cirkel met middelpunt M. De twee punten B en C liggen zodanig op de cirkel dat $AC \perp BM$ en $\hat{A} = 50°$.
Hoe groot is de aangeduide hoek tussen de rechten AC en BD?



(A) 50°	(B) 60°	(C) 65°	(D) 70°	(E) 75°

23. Hoeveel verschillende reële oplossingen heeft de vergelijking

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{7 - x} = 3?$$

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

24. De som van de eerste $5n$ strikt positieve gehele getallen is 1210 minder dan de som van de eerste $7n$ strikt positieve gehele getallen. Bepaal n.

(A) 6	(B) 8	(C) 9	(D) 10	(E) 12

25. Als we de veelterm $x^8 - 1$ ontbinden als een product van zoveel mogelijke reële veeltermen, hoeveel factoren verkrijgen we dan?

(A) 2	(B) 4	(C) 5	(D) 6	(E) 8

26. In een orthonormaal assenstelsel zijn $A(4,0)$ en $B(12,0)$ vaste punten, die samen met $P(k,k)$ een driehoek vormen.
Wat is de waarde van k opdat de driehoek een zo klein mogelijke omtrek zou hebben?

(A) 3	(B) 4	(C) 5	(D) 6	(E) 8

27. Als men twee willekeurige, verschillende getallen kiest uit de verzameling $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ dan is de kans dat ze opeenvolgende natuurlijke getallen zijn, gelijk aan 20%.
Bepaal n.

(A) 5	(B) 6	(C) 10
(D) 11	(E) geen van de vorige	

28. Stel $f(x) = \sqrt{x-2}$.
Welke van de volgende uitdrukkingen stelt het kleinste reëel getal uit het rijtje voor?

(A) 123	(B) $f(123)$	(C) $f(f(123))$
(D) $f(f(f(123)))$	(E) $f(f(f(f(123))))$	

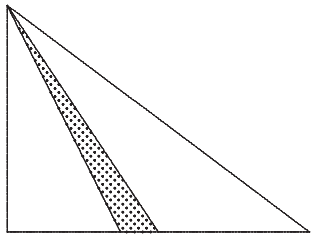
29. De som van alle getallen α tussen 0 en 2π die voldoen aan

$$\tan^2\alpha - 2003\tan\alpha + 1 = 0$$

is gelijk aan

(A) $\frac{\pi}{2}$	(B) π	(C) 2π	(D) $\frac{5\pi}{2}$	(E) 3π

30. Als men uit de grootste scherpe hoek van een rechthoekige driehoek met 30 en 40 als rechthoekszijden, de zwaartelijn en de bissectrice trekt, ontstaat een driehoekje met oppervlakte



(A) 50	(B) 70	(C) 75	(D) 80	(E) 150