

13 Vlaamse Wiskunde Olympiade: tweede ronde

De tweede ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringsysteem werkt als volgt: per goed antwoord krijgt de deelnemer 5 punten, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 1 punt en een foutief antwoord wordt als 0 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 2 uur.

13.1 De problemen

1.

$$\sqrt{0,111\dots} =$$

- (A) 0,111... (B) 0,222... (C) 0,333... (D) 0,444... (E) 0,555...

2. Bepaal de kleinste waarde van n waarvoor $n!$ deelbaar is door 2002.

($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$; b.v. $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$)

- (A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 13 (E) 1001

3. Als men van volgende sommen de kleinste twee en de grootste twee schrapt, welke som blijft dan over?

- (A) $\frac{1}{71} + \frac{1}{72} - \frac{1}{73} - \frac{1}{74}$ (B) $\frac{1}{71} - \frac{1}{72} - \frac{1}{73} + \frac{1}{74}$
(C) $-\frac{1}{71} + \frac{1}{72} - \frac{1}{73} + \frac{1}{74}$ (D) $-\frac{1}{71} + \frac{1}{72} + \frac{1}{73} - \frac{1}{74}$
(E) $\frac{1}{71} - \frac{1}{72} + \frac{1}{73} - \frac{1}{74}$

4. Het getal

$$2^{\binom{2002}{2}} + 1$$

eindigt op

- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

5. Als $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ dan is het omgekeerde van Φ gelijk aan

- (A) $-\Phi$ (B) $1 - \Phi$ (C) $\Phi - 1$
(D) $\Phi - \sqrt{5}$ (E) geen van de voorgaande

⁰Copyright Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. 2002

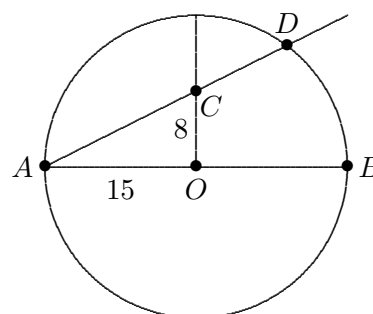
6. In hoeveel natuurlijke getallen kleiner dan 999 komt het cijfer 1 voor?

- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| (A) 243 | (B) 244 | (C) 253 | (D) 271 | (E) 276 |
|---------|---------|---------|---------|---------|

7. A is het getal van 30 cijfers 9 en B is het getal van 20 cijfers 9. Hoeveel cijfers 8 komen er in het product AB voor?

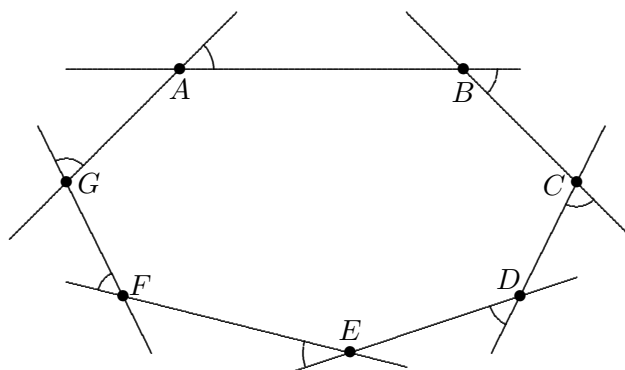
- | | | | | |
|----------|-------|--------|--------|--------|
| (A) geen | (B) 1 | (C) 20 | (D) 29 | (E) 30 |
|----------|-------|--------|--------|--------|

8. In het middelpunt van een cirkel met straal 15, trekt men een loodlijn op een middellijn $[AB]$. Op deze loodlijn past men een lijnstuk $[OC]$ van lengte 8 af. De rechte AC snijdt de cirkel een tweede maal in D . De lengte van het lijnstuk $[CD]$ ligt het dichtst bij



- | | | | | |
|---------|-------|---------|--------|----------|
| (A) 8,5 | (B) 9 | (C) 9,5 | (D) 10 | (E) 10,5 |
|---------|-------|---------|--------|----------|

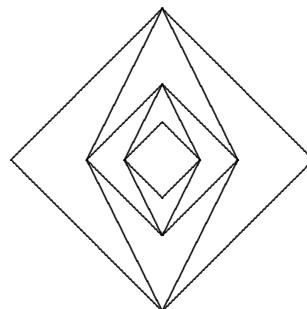
9. De som van de in de figuur aangeduide hoeken is gelijk aan



- | | | | | |
|-----------|----------------------|------------|----------------------|------------|
| (A) π | (B) $\frac{3\pi}{2}$ | (C) 2π | (D) $\frac{5\pi}{2}$ | (E) 3π |
|-----------|----------------------|------------|----------------------|------------|

10. In bijgaande figuur wordt een aantal ruiten opgebouwd, uitgaande van een ruit met twee diagonalen van lengte 1. Verdubbel nu de verticale diagonaal en je verkrijgt een nieuwe ruit; verdubbel dan in die nieuwe ruit de horizontale diagonaal en je verkrijgt een volgende ruit; herhaal deze werkwijze. De omtrekken van de eerste drie ruiten zijn dan:

$$2\sqrt{2}, 2\sqrt{5}, 2\sqrt{8}.$$



Wat is de omtrek van de zesde ruit?

- | | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| (A) $2\sqrt{40}$ | (B) $2\sqrt{60}$ | (C) $2\sqrt{64}$ | (D) $2\sqrt{72}$ | (E) $2\sqrt{80}$ |
|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|

11. Het totaal aantal punten dat drie sferen met verschillende middelpunten kunnen gemeen hebben, is nooit gelijk aan

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|--------------|
| (A) 0 | (B) 1 | (C) 2 | (D) 3 | (E) oneindig |
|-------|-------|-------|-------|--------------|

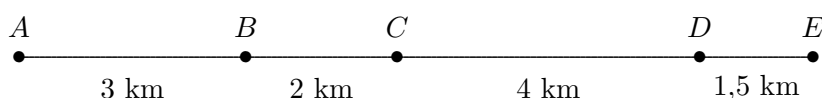
12. Jan en Mieke staan in de supermarkt voor het rek met chocolade. Jan merkt op: “Als ik de helft van mijn geld bij dat van jou voeg, hebben we juist genoeg voor twee repen”. Hierop zegt Mieke: “En als ik de helft van mijn geld bij dat van jou voeg, dan hebben we juist genoeg voor één”. Hoeveel geld heeft Jan?

- | | |
|--|----------------------------|
| (A) Geen. | (B) De helft van Mieke. |
| (C) Evenveel als Mieke. | (D) Het dubbele van Mieke. |
| (E) Het bedrag is niet te bepalen uit de gegevens. | |

13. Bij een bingoavond worden reeksen van 6 spelletjes gespeeld. Per reeks wordt de mogelijke winst per spel met 7 vermenigvuldigd. In de eerste reeks kan men per spel 1 eurocent winnen; in de tweede reeks kan men dus per spel 7 eurocent winnen, enzovoort. Zulma wint 100 euro. Hoeveel spelletjes heeft zij die avond gewonnen?

- | | | | | |
|-------|--------|--------|--------|--------|
| (A) 4 | (B) 10 | (C) 11 | (D) 12 | (E) 13 |
|-------|--------|--------|--------|--------|

14. Vijf vrienden Axel, Bart, Chris, Dirk en Erwin wonen langs dezelfde baan op afstanden van elkaar zoals aangegeven op bijgaand schema.



Om plannen te maken voor een fietstocht beslisten ze op een mooie lentedag samen te

komen langs diezelfde baan op een zekere plaats P , waarbij P zodanig gekozen is dat de totale afgelegde afstand tot P minimaal is.

Wat kan je zeggen over P ?

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|-------------|
| (A) $P = B$ | (B) P ligt tussen B en C | (C) $P = C$ |
| (D) P ligt tussen C en D | (E) $P = D$ | |

15. Jan, Bob en Tom zijn broers van Hilde en Inge. Inge is drie jaar jonger dan Hilde. De leeftijd van Bob is het rekenkundig gemiddelde van de leeftijden van Jan en Hilde. Jan en Tom samen, alsook Bob en Inge samen, zijn 1 jaar jonger dan tweemaal de leeftijd van Hilde. Jan en Inge samen zijn 1 jaar ouder dan tweemaal de leeftijd van Hilde. Wie is het oudste kind?

- | | | | | |
|-----------|----------|---------|---------|---------|
| (A) Hilde | (B) Inge | (C) Bob | (D) Jan | (E) Tom |
|-----------|----------|---------|---------|---------|

16. Gegeven de reële functie $f(x) = 1 - x$. Haar inverse functie heeft als voorschrift

- | | | | | |
|-------------|-------------|-------------|-----------------------|-----------------------|
| (A) $1 - x$ | (B) $x - 1$ | (C) $x + 1$ | (D) $\frac{1}{1 - x}$ | (E) $\frac{1}{x - 1}$ |
|-------------|-------------|-------------|-----------------------|-----------------------|

17. Als $\sin x + \cos x = A$, dan is $\sin^3 x + \cos^3 x$ gelijk aan

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| (A) A^3 | (B) $\frac{A(A^2 - 3)}{2}$ | (C) $\frac{A(A^2 + 3)}{4}$ |
| (D) $\frac{A(3 - A^2)}{2}$ | (E) $\frac{A(A^2 + 1)}{2}$ | |

18. Als we in het functievoorschrift $y = f(x)$ de veranderlijke x vervangen door $2 - x$, wat gebeurt er dan met de grafiek van f ?

- | |
|---|
| (A) Ze wordt verschoven naar rechts over een afstand 2. |
| (B) Ze wordt verschoven naar links over een afstand 2. |
| (C) Ze wordt gespiegeld t.o.v. de rechte $x = 2$. |
| (D) Ze wordt gespiegeld t.o.v. de rechte $x = -2$. |
| (E) Ze wordt gespiegeld t.o.v. de rechte $x = 1$. |

19. Onderstel dat f een even functie is en g een oneven functie, beide met domein \mathbb{R} en niet identiek 0. Hoeveel van volgende functies zijn oneven?

$$f \circ g, \quad g \circ f, \quad f \circ f, \quad g \circ g, \quad f + g$$

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| (A) 1 | (B) 2 | (C) 3 | (D) 4 | (E) 5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|

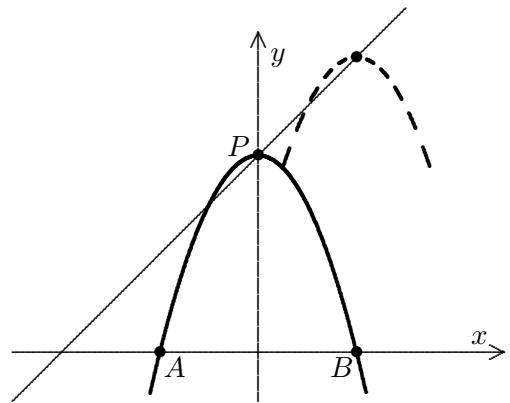
20. Voor hoeveel gehele getallen is $\log \frac{x(10-x)}{16} < 0$?

- | | | |
|-------|-------------------|-------|
| (A) 1 | (B) 2 | (C) 5 |
| (D) 9 | (E) oneindig veel | |

21. Welk van volgende functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is strikt stijgend?

- | | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| (A) $\frac{1}{1+x^2}$ | (B) $\frac{x}{1+x^2}$ | (C) $\frac{x^2}{1+x^2}$ | (D) $\frac{x^3}{1+x^2}$ | (E) $\frac{x^4}{1+x^2}$ |
|-----------------------|-----------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|

22. De parabool $y = 4 - x^2$ heeft top P en snijdt de x -as in de punten A en B . De parabool wordt verschoven zodanig dat zijn top beweegt langs de rechte $y = x + 4$ tot een zeker punt Q . In deze positie snijdt de parabool de x -as ook in het punt B . Welk is de y -coördinaat van het punt Q ?



- | | | | | |
|-------|-------|-------|--------|--------|
| (A) 6 | (B) 8 | (C) 9 | (D) 10 | (E) 12 |
|-------|-------|-------|--------|--------|

23. Welke ongelijkheid is fout als $x > 2002$?

- | | | |
|-----------------------|--------------------|--------------------|
| (A) $x^2 < 2^x$ | (B) $100x^2 < x^4$ | (C) $2^x < x^{10}$ |
| (D) $x^{-4} < x^{-2}$ | (E) $2^x < 10^x$ | |

24. De som van de reële wortels van $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0$ is

- | | | | | |
|----------|---------|--------------------|---------|-----------------------|
| (A) -3 | (B) 1 | (C) $1 - \sqrt{2}$ | (D) 3 | (E) $1 - \sqrt[3]{2}$ |
|----------|---------|--------------------|---------|-----------------------|

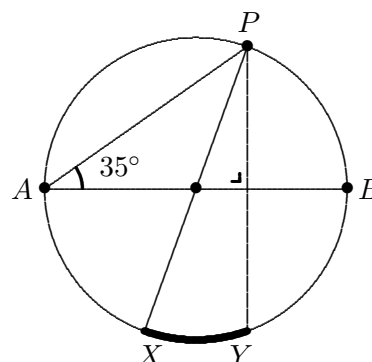
25. Het interval van alle waarden van

$$\frac{6}{5} \sin^2 \alpha + \frac{7}{5} \cos^2 \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

heeft lengte

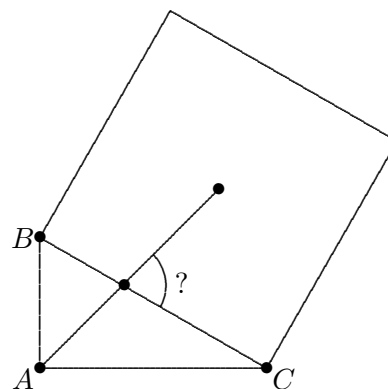
- | | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| (A) $\frac{1}{5}$ | (B) $\frac{2}{5}$ | (C) $\frac{6}{5}$ | (D) $\frac{7}{5}$ | (E) $\frac{13}{5}$ |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|

26. Door een punt P van de cirkel met middellijn $[AB]$ trekt men de middellijn $[PX]$ en twee koorden $[PA]$ en $[PY]$ met $PY \perp AB$. Als \widehat{PAB} gelijk is aan 35° , hoe groot is dan de boog \widehat{XY} ?



- (A) 20° (B) 35° (C) 40° (D) 55° (E) 70°

27. Op de schuine zijde van een rechthoekige driehoek ABC met hoeken $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$ tekent men een vierkant zoals in de figuur. Het middelpunt van dit vierkant verbindt men met A . Hoe groot is de hoek die deze verbindingslijn maakt met de schuine zijde?



- (A) 60° (B) 70° (C) 75° (D) 80° (E) 90°

28. De middelpunten van twee cirkels liggen op 41 cm van elkaar. De straal van de kleinste cirkel meet 4 cm en deze van de grootste cirkel meet 5 cm. De afstand tussen de twee raakpunten op de binnenraaklijn is

- (A) 36 cm (B) 38 cm (C) 39 cm (D) 40 cm (E) 41 cm

29. Als men een elastisch balletje laat vallen op een houten vloer, dan botst het terug tot op de helft van de hoogte waarvan het viel. Als we het laten vallen van op 1 meter hoogte en we laten het botsen, welke afstand zal het dan in totaal afleggen?

- (A) 2 m (B) 2,5 m (C) 2,6666... m
(D) 3 m (E) oneindig

30. Noem p_1 de kans op een 6 als je één dobbelsteen werpt, p_2 de kans op precies één 6 als je twee dobbelstenen werpt en p_3 de kans op precies twee zessen als je drie dobbelstenen werpt. Wat is correct? (Alle dobbelstenen zijn onvervalst.)

- (A) $p_1 < p_3 < p_2$ (B) $p_3 < p_1 < p_2$ (C) $p_2 < p_1 < p_3$
(D) $p_2 < p_3 < p_1$ (E) $p_3 < p_2 < p_1$

