1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 2000-2001: Tweede ronde

De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem werkt als volgt: per goed antwoord krijgt de deelnemer 5 punten, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 1 punt en een foutief antwoord wordt als 0 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 3 uur.

1.1 De problemen

1. Welk getal moet men bij teller en noemer van $\frac{1}{4}$ optellen om de breuk $\frac{n}{n+1}$ te bekomen?

(A) $1-n$	(B) $1-3n$	(C) $n-1$	(D) $n-3$	(E) $3n-1$

2. Als de reële getallen u, v, w voldoen aan $u < v < w < 0$, welke uitspraak is dan fout?

(A) $vw < uw$	(B) $vu < wv$	(C) $u + w < v + w$
(D) $0 < w - u$	(E) $0 < uw$	

3. Beschouw $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\,2}$, $\sqrt{4^{\sqrt{2}}}$, $(\sqrt{2})^{\sqrt{8}}$, $\sqrt{8}$.
Hoeveel verschillende getallen zijn er in het totaal gegeven?

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

4. Twee concentrische cirkels (cirkels met zelfde middelpunt) zijn 8 cm van elkaar verwijderd. Een koorde in de grote cirkel raakt de kleine cirkel en is 40 cm lang.
De stralen van de cirkels, in cm, zijn

(A) 21 en 18	(B) 23 en 15	(C) 25 en 17
(D) 27 en 19	(E) 29 en 21	

5. Een tennistornooi wordt georganiseerd met $2n$ deelnemers. In de eerste ronde zijn er n wedstrijden: elke deelnemer speelt juist één keer tegen een andere speler. Op hoeveel verschillende manieren kunnen de paren voor de eerste ronde worden samengesteld?

(A) n^2	(B) $n(2n-1)$
(C) $2n(2n-1)(2n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$	(D) $(2n-1)(2n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$
(E) $(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1$	

6. Een verpleegster heeft 10 cc nodig van een geneesmiddel dat 15,5% van een zekere stof A bevat. Om dit te bereiken mengt ze x cc van een oplossing met 20% van A en y cc van een oplossing met 5% van A. Over x weten we dat

(A) $x \leq 6{,}5$	(B) $6{,}5 < x \leq 6{,}8$	(C) $6{,}8 < x \leq 7$
(D) $7 < x \leq 7{,}2$	(E) $7{,}2 < x$	

7. Twee meisjes en een jongen mogen één of meerdere gebakjes kiezen. Er zijn 8 verschillende soorten gebakjes, zeker 4 van elke soort. Op hoeveel manieren kan dit gebeuren als de jongen er twee kiest en de meisjes elk één?

(A) 2304	(B) 2048	(C) 840	(D) 512	(E) 420

8. Gegeven een ruit met diagonalen 6 en 8 en de ingeschreven cirkel C_1. De hoekpunten van de ruit zijn de middens van de zijden van een rechthoek, die ingeschreven is in een cirkel C_2. Wat is dan de verhouding van de stralen van de cirkels C_1 en C_2?

(A) minder dan 0,48	(B) 0,48	(C) 0,56
(D) 0,64	(E) meer dan 0,64	

9. De grootste gemene deler van 878787878787 en 787878787878 is

(A) 3	(B) 9	(C) 27
(D) 10101010101	(E) 30303030303	

10. Als $\sin x = 3\cos x$, dan is $\sin x \cos x$ gelijk aan

(A) $\frac{1}{6}$	(B) $\frac{1}{5}$	(C) $\frac{2}{9}$	(D) $\frac{1}{4}$	(E) $\frac{3}{10}$

11. Voor $a = 4$ is de waarde van de breuk $\dfrac{(a+2)x + a^2 - 1}{ax - 2a + 18}$ onafhankelijk van x.

De andere waarde of waarden van a waarvoor dit het geval is behoren tot het interval

(A) $]-\infty, -2[$	(B) $[-2, 0[$	(C) $[0, 2[$	(D) $[2, 4[$	(E) $[4, +\infty[$

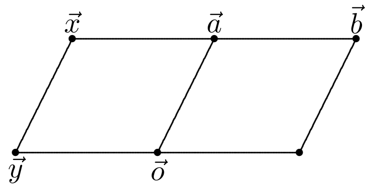
12. Als $\sin\alpha + \cos\alpha = k$, dan is $|\sin\alpha - \cos\alpha|$ gelijk aan

(A) $\sqrt{2-k^2}$	(B) $\sqrt{k^2-2}$	(C) $\lvert k\rvert$	(D) $\sqrt{2}-k$	(E) $k-\sqrt{2}$

13. Als een reële functie f voor elke $x \in \mathbb{R}$ voldoet aan $f(x) + x\,f(1-x) = x$, dan is $f(2)$ gelijk aan

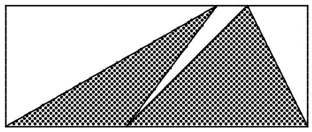
(A) $\frac{4}{3}$	(B) $\frac{5}{4}$	(C) $\frac{6}{5}$	(D) $\frac{7}{6}$	(E) $\frac{8}{7}$

14. In bijgaande figuur, opgebouwd met 2 congruente parallellogrammen is $\vec{x} + \vec{y}$ gelijk aan



(A) $\vec{a} - 2\vec{b}$	(B) $-2\vec{b}$	(C) $3\vec{a} - 2\vec{b}$	(D) $-\vec{a} - 2\vec{b}$	(E) $-\vec{a} + 2\vec{b}$

15. Hoeveel procent van de gegeven rechthoek werd gearceerd?



(A) 33	(B) 45	(C) 50	(D) 55	(E) 60

16. Beschouw in een rechthoekig assenkruis de grafieken van de functies
$f(x) = 1 + |x-2|$, $g(x) = x^3 - 2$, $h(x) = (x-2)^2 + 1$, $k(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$
Hoeveel van deze grafieken hebben een verticale symmetrieas?

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

17. We definiëren n-faculteit en we noteren dat als $n!$:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 \text{ met } n \in \mathbb{N}_0$$

Voorbeeld: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.
Voor hoeveel waarden van n is $1! + 2! + 3! + \ldots + n!$ het kwadraat van een natuurlijk getal?

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) meer dan 3

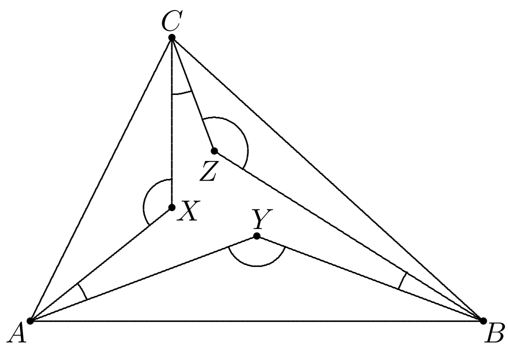
18. Het quotiënt $\dfrac{6{,}8888\ldots}{2{,}4444\ldots}$ is gelijk aan

(A) 3,2	(B) 3,2222...	(C) 3	(D) $\dfrac{17}{6}$	(E) $\dfrac{31}{11}$

19. Welk is de grootst mogelijke grootste gemene deler van 6 verschillende natuurlijke getallen van 2 cijfers?

(A) 13	(B) 15	(C) 16	(D) 18	(E) 23

20. In het inwendige van een driehoek ABC beschouwen we drie punten X, Y en Z, zodat geen enkel paar van de lijnstukken $[AX]$, $[AY]$, $[BY]$, $[BZ]$, $[CZ]$, $[CX]$ elkaar buiten de genoemde punten ontmoeten. We bekomen een onregelmatige driepuntige ster. Bepaal de grootste ondergrens en de kleinste bovengrens van de som van de zes aangeduide hoeken $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ (zie figuur).

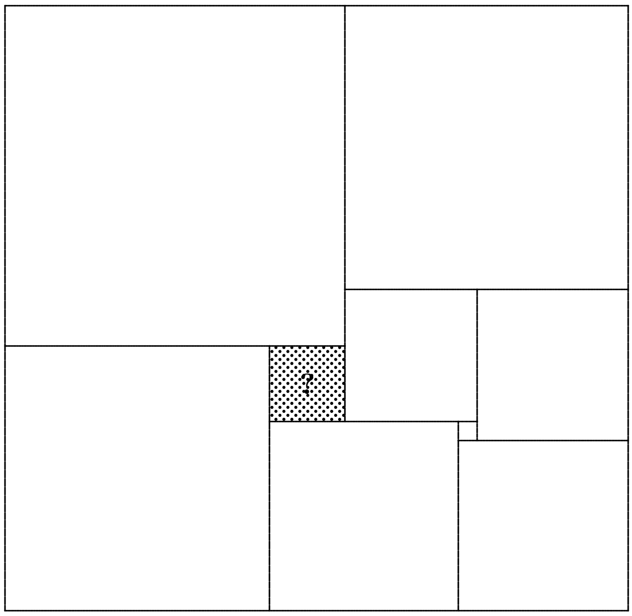


(A) $(2\pi, 4\pi)$	(B) $(2\pi, 5\pi)$	(C) $(3\pi, 4\pi)$
(D) $(3\pi, 5\pi)$	(E) zijn niet allebei samen te bepalen	

21. Gegeven een kubus met ribbe van lengte a. De afstand van een ribbe tot een ruimtediagonaal, die geen punt met de gegeven ribbe gemeen heeft, is gelijk aan

(A) $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$	(B) $\dfrac{a}{2}$	(C) $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$	(D) $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	(E) $\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$

22. Boer Teun heeft zijn rechthoekig stuk land verdeeld in 9 vierkante stukken zoals op de figuur hiernaast. Het kleinste stuk heeft een oppervlakte van 1 m^2.
De oppervlakte van het op één na kleinste vierkant is gelijk aan



(A) 9 m^2	(B) 12,25 m^2	(C) 16 m^2	(D) 20,25 m^2	(E) 25 m^2

23. Rozemieke zit in een trein met 49 wagons in volgorde genummerd van 1 tot 49. Ze merkt op dat de som van de nummers lager dan het nummer van haar wagon gelijk is aan de som van de nummers hoger dan het nummer van haar wagon. In welke wagon zit Rozemieke?

(A) 31	(B) 32	(C) 33	(D) 34	(E) 35

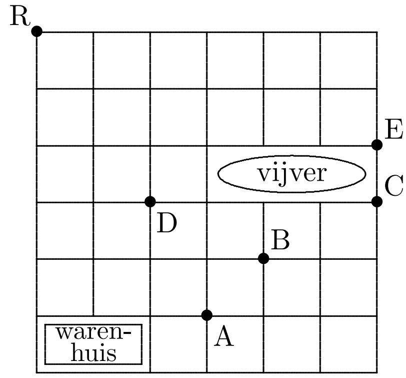
24. Ria en An spelen een spel waarbij ze om de beurt 1, 2 of 3 lucifers van een stapeltje moeten nemen; wie de laatste lucifer neemt, verliest. An mag als eerste spelen, maar Ria mag het beginaantal lucifers in het stapeltje kiezen. Met hoeveel lucifers in het stapeltje kan Ria haar overwinning verzekeren?

(A) 11	(B) 12	(C) 13	(D) 14	(E) 15

25. Op welk cijfer eindigt het getal $3^{2001} - 2^{2001}$?

(A) 1	(B) 3	(C) 5	(D) 7	(E) 9

26. Mohammed en René wonen in dezelfde wijk. Toen Mohammed vorige zomer 8 weken op reis ging, voederde René elke dag de vissen van Mohammed. Hij kon daarbij elke dag een andere route, zonder omweg, volgen vanaf zijn huis R naar het huis van Mohammed. Mohammed woont in

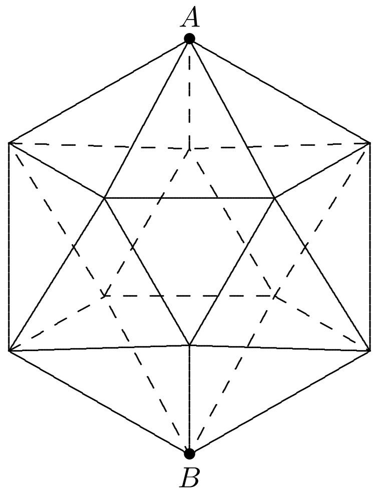


(A) A	(B) B	(C) C	(D) D	(E) E

27. Een scherphoekige driehoek met zijden a, b en c met $a < b < c$ wordt in de ruimte gewenteld rond elk van zijn zijden zodat omwentelingslichamen ontstaan. Wanneer is de inhoud het grootst?

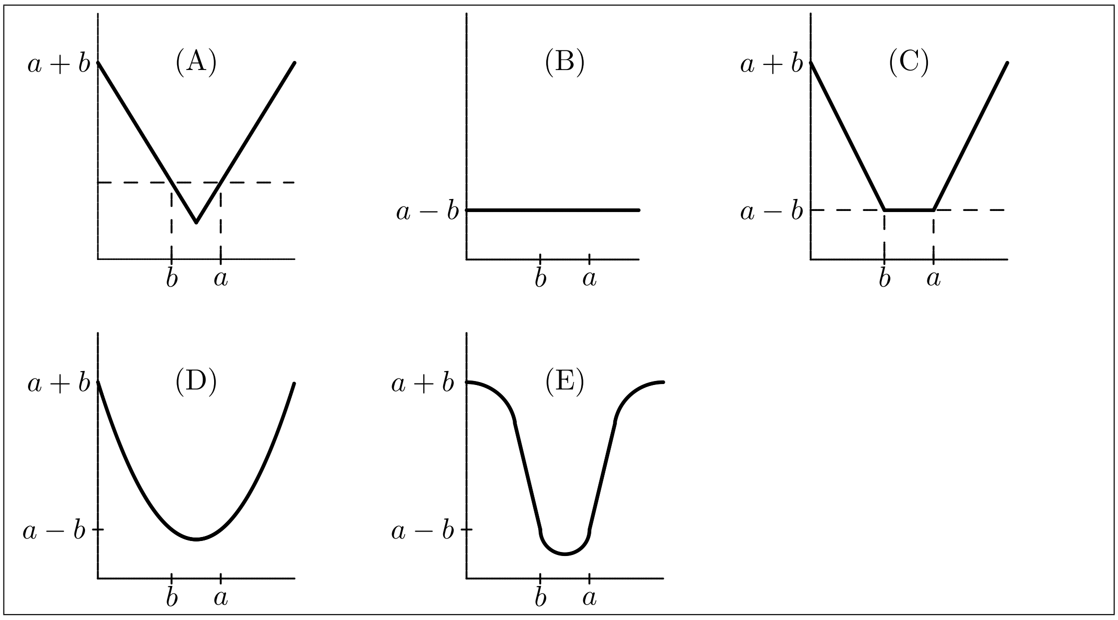
(A) Als we wentelen rond de zijde met lengte a.
(B) Als we wentelen rond de zijde met lengte b.
(C) Als we wentelen rond de zijde met lengte c.
(D) De drie inhouden zijn gelijk.
(E) Dit is niet a priori te bepalen.

28. Twee wezens bevinden zich op tegenoverliggende hoekpunten A en B van een planeet in de vorm van een regelmatig twintigvlak met ribbe 1, zoals op de figuur is aangegeven. De kortste afstand langs het planeetoppervlak van A tot B is gelijk aan



(A) $\sqrt{3}+1$	(B) $\sqrt{7}$	(C) 3	(D) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$	(E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

29. Zijn O, A en B drie punten in het vlak met $a = |OA|$, $b = |OB|$ en $a > b$. Beschouw een cirkel met middelpunt O en veranderlijke staal r. De grafiek van de functie die de som van de afstanden van A en B tot deze cirkel uitdrukt als functie van r, is



30. Een eerste doos bevat 2 zwarte en 2 groene balpennen en een tweede doos bevat 4 groene en 6 rode balpennen. Men neemt uit de tweede doos een willekeurige balpen en legt ze in de eerste en daarna neemt men uit de eerste doos een willekeurige balpen en legt ze in de tweede. Wat is hierna de kans dat de dozen terug hun oorspronkelijke kleurensamenstelling hebben?

(A) 50%	(B) 36%	(C) 24%	(D) 18%	(E) 12%