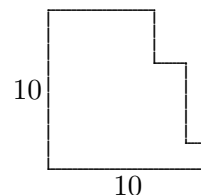


13 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1999-2000: Tweede ronde.

De tweede ronde bestaat eveneens uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringsysteem is hetzelfde als dat voor de eerste ronde, d.w.z. per goed antwoord krijgt de deelnemer 5 punten, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 1 punt en een foutief antwoord wordt als 0 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt nu evenwel slechts 2 uur.

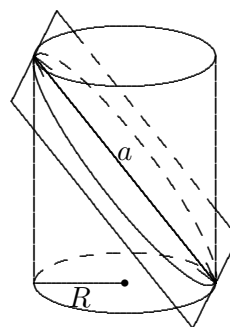
13.1 De problemen

1. De omtrek van de gegeven figuur is



- | | | |
|--------------------|---------------------|---------------------|
| (A) kleiner dan 40 | (B) 40 | (C) tussen 40 en 80 |
| (D) 85 | (E) niet te bepalen | |

2. Een cilinder met straal R wordt gesneden door een vlak zoals op de figuur. Het vlak raakt elk van de twee cirkels die grond- en bovenvlak vormen. De afstand tussen de raakpunten is a . Bepaal het volume van het deel van de cilinder onder het vlak.



- | | |
|---|--------------------------------|
| (A) $\frac{1}{2}\pi R^2\sqrt{a^2 - 4R^2}$ | (B) $\pi R^2\sqrt{a^2 - 4R^2}$ |
| (C) $\pi R^2\sqrt{a^2 - R^2}$ | (D) $\frac{1}{2}\pi R^2 a$ |
| (E) $\frac{1}{2}\pi R(a^2 - 4R^2)$ | |

3. Welke van volgende verzamelingen is eindig?

- | |
|---|
| (A) $\left\{\frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{N}_0, \frac{x}{y} \geq 2000, x \geq 2000\right\}$ |
| (B) $\left\{\frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{N}_0, \frac{x}{y} \leq 2000, x \leq 2000\right\}$ |
| (C) $\left\{\frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{N}_0, \frac{x}{y} \leq 2000, y \leq 2000\right\}$ |
| (D) $\left\{\frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{N}_0, \frac{x}{y} \leq 2000, x \geq 2000\right\}$ |
| (E) $\left\{\frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{N}_0, \frac{x}{y} \leq 2000, y \geq 2000\right\}$ |

4. $\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ is gelijk aan

- | | | | | |
|-------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|
| (A) 2 | (B) $2\sqrt{2}$ | (C) $\sqrt{5}$ | (D) $2\sqrt{5}$ | (E) $\sqrt{6}$ |
|-------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|

5. Als $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ voldoet aan de eigenschap dat $\forall x, y \in \mathbb{R}_0^+ : f(xy) = f(x) + f(y)$, dan is $f(0,5) + f(1) + f(2)$

- | | | |
|-------------------|---|-------|
| (A) 0 | (B) 1 | (C) 2 |
| (D) $\frac{7}{2}$ | (E) niet te bepalen bij gebrek aan gegevens | |

6. Voor een deelverzameling A van een verzameling S definieert men de karakteristieke functie k_A als volgt

$$\begin{aligned}k_A(x) &= 1 \text{ als } x \in A \\k_A(x) &= 0 \text{ als } x \in S \setminus A\end{aligned}$$

Beschouw de volgende uitspraken over willekeurige deelverzamelingen A en B van S :

- I. $k_A \cdot k_B$ is de karakteristieke functie van $A \cap B$.
- II. $k_A + k_B$ is de karakteristieke functie van $A \cup B$.
- III. $k_A - k_{A \cap B}$ is de karakteristieke functie van $A \setminus B$.

De correcte uitspraken zijn

- | | | | | |
|-------|-------------|--------------|---------------|------------------|
| (A) I | (B) I en II | (C) I en III | (D) II en III | (E) I, II en III |
|-------|-------------|--------------|---------------|------------------|

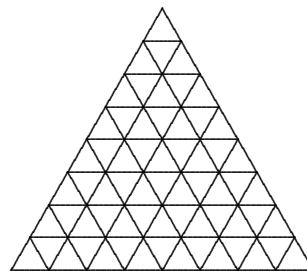
7. Op een cirkel kiest men een vast punt a en een veranderlijk punt b . Hoe groot is de kans dat de lengte van de koorde $[ab]$ kleiner is dan de straal?

- | | | | | |
|-------------------|-------------------|---------------------|-------------------|-------------------|
| (A) $\frac{1}{2}$ | (B) $\frac{1}{3}$ | (C) $\frac{1}{\pi}$ | (D) $\frac{1}{4}$ | (E) $\frac{1}{6}$ |
|-------------------|-------------------|---------------------|-------------------|-------------------|

8. Welke uitspraak is vals?

- | |
|--|
| (A) Alle rechthoeken zijn gelijkvormig. |
| (B) Alle cirkels zijn gelijkvormig. |
| (C) Alle vierkanten zijn gelijkvormig. |
| (D) Alle regelmatige vijfhoeken zijn gelijkvormig. |
| (E) Alle gelijkbenige driehoeken met tophoek 50° zijn gelijkvormig. |

9. Verdeel elke zijde van een gegeven driehoek in 2000 gelijke stukken en verbind de verkregen verdeelpunten op de wijze zoals op de figuur hiernaast (met 8 in plaats van 2000 gelijke stukken). Hoeveel driehoekjes met de kleinste oppervlakte zijn er dan?



- (A) 1.999.000 (B) 2.000.000 (C) 2.001.000 (D) 3.998.001 (E) 4.000.000

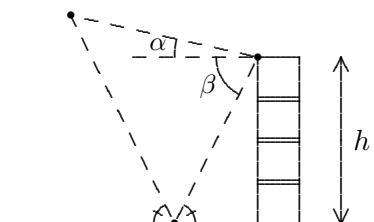
10. Als $x \in \mathbb{R}$, dan is de kleinste waarde van $x^2 + 3x$ gelijk aan

- (A) $-\frac{9}{4}$ (B) $-\frac{3}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{9}{4}$

11. Het aantal reële wortels van $x^4 - 2x + 3 = 0$ is

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

12. Een ornithologe bevindt zich op hoogte h boven de waterspiegel van een meer. Boven haar ziet ze een vogel onder een hoek α en zijn beeld in het water onder een hoek β . Hoe hoog vliegt de vogel boven het meer?



- (A) $2h \sin \beta$ (B) $2h \cos \beta$ (C) $h \sin(\alpha + \beta)$
 (D) $\frac{h}{\cos(\beta - \alpha)}$ (E) $h \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta - \alpha)}$

13. Hoeveel van volgende uitspraken zijn waar voor $x = 2000^\circ$?

- $\sin x - \cos x < 0$
 $\sin x - \operatorname{tg} x < 0$
 $\cos x - \operatorname{tg} x < 0$
 $\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x < 0$

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

14. Het kleinste natuurlijk getal met juist 15 delers behoort tot het interval

- (A) $]0, 50]$ (B) $]50, 100]$ (C) $]100, 150]$ (D) $]150, 200]$ (E) $]200, 250]$

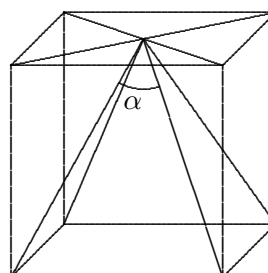
15. We definiëren een “priemdrieling” als een drietal priemgetallen (a, b, c) met $c - b = b - a = 2$. Hoeveel dergelijke “priemdrielingen” zijn er?

(A) 0	(B) 1
(C) 2	(D) een eindig aantal groter dan 2
(E) oneindig veel	

16. $0,5^{0,5} =$

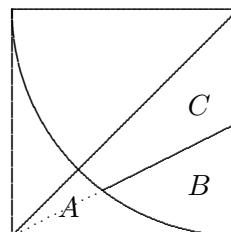
(A) 1	(B) 0,25	(C) $0,1^{0,1}$	(D) 5^5	(E) $0,25^{0,25}$
-------	----------	-----------------	-----------	-------------------

17. In een kubus verbindt men het middelpunt van het bovenvlak met de vier hoekpunten van het grondvlak. Hierdoor ontstaat een regelmatige piramide. Hoe groot is de cosinus van de tophoek α van een opstaand zijvlak?



(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$	(B) $\frac{2}{3}$	(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	(D) $\frac{7}{9}$	(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
--------------------------	-------------------	--------------------------	-------------------	--------------------------

18. In de figuur zien we een vierkant, een kwartcirkel, een diagonaal van het vierkant en een lijnstuk dat een hoekpunt met het middelpunt van een zijde verbindt. Wat kan men dan zeggen over de oppervlaktes A , B en C van de aangeduide gebieden?



(A) $A < B < C$	(B) $A < C < B$	(C) $B < A < C$
(D) $B < C < A$	(E) $C < A < B$	

19. Als je alle hoekpunten van een regelmatige 11-hoek twee aan twee verbindt, hoeveel lijnstukken met verschillende lengte krijg je dan?

(A) 4	(B) 5	(C) 10	(D) 12	(E) 55
-------	-------	--------	--------	--------

20. Beschouw een balk met afmetingen $30 \times 40 \times 50$ opgebouwd uit 60 kubussen met afmetingen $10 \times 10 \times 10$. Hoeveel van deze kubussen worden doorsneden door een ruimtediagonaal van de balk?

(A) 8	(B) 9	(C) 10	(D) 11	(E) 12
-------	-------	--------	--------	--------

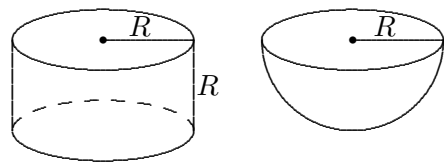
21. Veronderstel dat je reeds 15 van de vorige 20 vragen correct hebt beantwoord. Hoeveel vragen moet je in deze ronde nog correct beantwoorden om 80% van de vragen juist beantwoord te hebben?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) alle 10

22. Neem twee vaste reële getallen a en b ($a \neq b$). De vergelijking $|x - a| + |x - b| = k$ in de onbekende x ($\in \mathbb{R}$) met $k > 0$ heeft

(A) juist één oplossing voor precies één waarde van k .
 (B) juist één oplossing voor oneindig veel waarden van k .
 (C) oneindig veel oplossingen voor precies één waarde van k .
 (D) oneindig veel oplossingen voor meerdere waarden van k .
 (E) twee oplossingen voor elke waarde van k .

23. Twee potten, één in de vorm van een cilinder met hoogte R en straal van het grondvlak R , één in de vorm van een halve bol met straal R , beide zonder deksel, worden gelijkmatig geschilderd (binnen- en buitenkant). Als men voor de cilinder k keer zoveel verf nodig heeft als voor de halve bol, dan is k gelijk aan

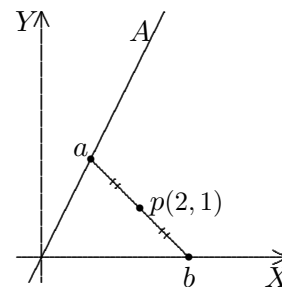


(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 1,5 (D) $\frac{\pi}{2}$ (E) 2

24. Vijf klanten moeten elk een ander bedrag betalen aan een bedrijf. Een niet aandachtige boekhouder schrijft de vijf namen in willekeurige volgorde op de facturen. Een slaperige secretaresse steekt de vijf facturen in willekeurige volgorde in vijf geadresseerde enveloppen. Een luie koerier steekt de vijf enveloppen in willekeurige volgorde in de brievenbussen van de vijf klanten. Wat is de kans dat elke klant het juiste bedrag op de factuur in zijn brievenbus vindt?

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{5^3}$ (C) $\frac{1}{5^{15}}$ (D) $\frac{1}{5!}$ (E) $(\frac{1}{5!})^3$

25. In een orthonormaal assenstelsel beschouwen we de rechte A met vergelijking $y = 2x$ en een vast punt $p(2, 1)$. Door p trekken we een rechte die A snijdt in a en de X -as in b zodanig dat p het midden is van $[ab]$. De lengte van het lijnstuk $[ab]$ is dan gelijk aan



(A) $2\sqrt{2}$ (B) 3 (C) $3\sqrt{2}$ (D) 4 (E) $2\sqrt{5}$

26. Beschouw de getallen van twee cijfers die, na vermenigvuldiging met de som van hun cijfers, een product opleveren gelijk aan de som van de derdemachten van die cijfers. Het aantal dergelijke getallen is

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4
-------	-------	-------	-------	-------

27. Hoeveel van de volgende vergelijkingen hebben reële oplossingen?

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x &= 1 \\ \cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x &= 1 \\ \sin^2 x + \operatorname{cotg}^2 x &= 1 \\ \cos^2 x + \operatorname{cotg}^2 x &= 1 \\ \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x &= 1 \end{aligned}$$

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5
-------	-------	-------	-------	-------

28. Het grootste geheel getal kleiner dan of gelijk aan x wordt voorgesteld door $\lfloor x \rfloor$. Voorbeelden zijn: $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ en $\lfloor 2000 \rfloor = 2000$.

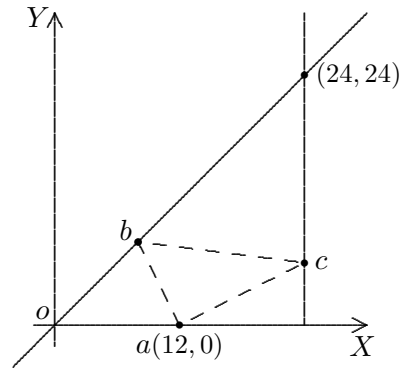
Zij $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$. Het aantal even getallen i met $m \leq i \leq n$ is

(A) $\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor$	(B) $\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor$	(C) $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$
(D) $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$	(E) $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$	

29. De hoogtelijn vanuit de rechte hoek van rechthoekige driehoek abc waarvan de hoek in a α radialen ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) groot is, verdeelt deze rechthoekige driehoek in twee delen met oppervlaktes A en B . Zij A de oppervlakte van dat deel, dat a als hoekpunt heeft. Het quotiënt $\frac{A}{B}$ is gelijk aan

(A) $\operatorname{cotg} \alpha$	(B) $\operatorname{tg} \alpha$	(C) $\sin \alpha$	(D) $\operatorname{tg}^2 \alpha$	(E) $\operatorname{cotg}^2 \alpha$
----------------------------------	--------------------------------	-------------------	----------------------------------	------------------------------------

30. In een orthonormaal assenstelsel beschouwt men het punt $a(12, 0)$, een veranderlijk punt b op de rechte $y = x$ en een veranderlijk punt c op de rechte $x = 24$. Als de driehoek abc een minimale omtrek heeft, welke zijn dan de coördinaten van het punt b ?



- | | |
|--|--------------|
| (A) (6, 6) | (B) (8, 8) |
| (C) (9, 9) | (D) (12, 12) |
| (E) Er bestaat geen punt b waarvoor de omtrek minimaal is. | |

Inhoudsopgave

1	Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w.	4
2	De wedstrijd “Vlaamse Wiskunde Olympiade” (VWO)	4
3	De International Mathematics Olympiad: Roemenië 1999 ...	6
4	... Zuid-Korea 2000	7
5	Beknopte cijfergegevens van V.W.O. 1999-2000	9
6	Deelnemende scholen 1999-2000	13
7	Deelnemen aan de Vlaamse Wiskunde Olympiade?	17
8	Zoekerswedstrijd Fernand Goethals	18
9	Zoekerswedstrijd Fernand Goethals: editie 1999-2000.	19
10	De laureaten van VWO 1999-2000.	20
11	De sponsors van VWO 1999-2000.	22
12	Vlaamse Wiskunde Olympiade 1999-2000: Eerste ronde.	23
	12.1 De problemen	23
	12.2 De oplossingen.	30
	12.3 Het antwoordrooster.	38
13	Vlaamse Wiskunde Olympiade 1999-2000: Tweede ronde.	39
	13.1 De problemen	39
	13.2 De oplossingen.	46
	13.3 Het antwoordrooster	56
14	De finale	57