1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1998-1999: Tweede ronde.

De tweede ronde bestaat eveneens uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem is hetzelfde als dat voor de eerste ronde, d.w.z. per goed antwoord krijgt de deelnemer 5 punten, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 1 punt en een foutief antwoord wordt als 0 aangerekend. De voorzien antwoordduur bedraagt nu evenwel slechts 2 uur.

1.1 De problemen

Volgende benaderingen kunnen nuttig zijn bij het oplossen van sommige vragen.

$\sqrt{2} \approx 1{,}4$; $\sqrt{3} \approx 1{,}7$; $\sqrt{5} \approx 2{,}2$; $\sqrt{6} \approx 2{,}4$; $\sqrt{7} \approx 2{,}6$; $\sqrt{8} \approx 2{,}8$; $\sqrt{10} \approx 3{,}16$

1. Vereenvoudig

$$\frac{(x^{-1}+y^{-1})^{-1}-(x^{-1}-y^{-1})^{-1}}{(y^{-1}-x^{-1})^{-1}-(y^{-1}+x^{-1})^{-1}} \quad \text{met } x, y \neq 0,\ x \neq y \text{ en } x \neq -y.$$

(A) $\frac{x}{y}$	(B) $\frac{y}{x}$	(C) $\frac{2y}{x+y}$	(D) $\frac{y-x}{y}$	(E) $\frac{y-x}{y+x}$

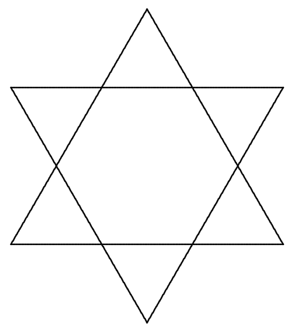
2. Welke ongelijkheid is fout?

(A) $\sin 300^\circ < \sin 350^\circ$ (B) $\cos 300^\circ < \cos 350^\circ$
(C) $\sin 300^\circ < \cos 350^\circ$ (D) $\text{tg}\, 300^\circ < \text{tg}\, 350^\circ$
(E) $\text{cotg}\, 300^\circ < \text{cotg}\, 350^\circ$

3. In de decimale schrijfwijze van $\frac{1}{7000}$ is het 1999ste cijfer na de komma gelijk aan

(A) 2	(B) 4	(C) 5	(D) 7	(E) 8

4. Een davidster wordt gevormd door het over elkaar plaatsen van twee gelijkzijdige driehoeken met dezelfde afmetingen. Aldus wordt een figuur gevormd die bestaat uit een regelmatige zeshoek omringd door zes kleinere gelijkzijdige driehoeken. Bepaal de verhouding van de oppervlakte van de hele ster tot deze van de inwendige zeshoek.

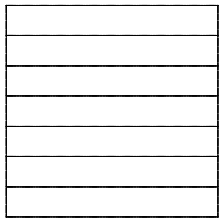


(A) $\frac{3}{2}$	(B) $\sqrt{2}$	(C) $\sqrt{3}$	(D) 2	(E) 3

5. De diagonaal van een rechthoek is tweemaal zo lang als één van de zijden a. Hoe lang is de andere zijde?

(A) a	(B) $a\sqrt{3}$	(C) $a\sqrt{5}$	(D) $\frac{5}{4}a$	(E) $\frac{3}{2}a$

6. Een vierkant wordt verdeeld in 7 congruente rechthoeken met elk een omtrek van 32. Wat is de omtrek van het vierkant?



(A) 56	(B) 98	(C) 112	(D) 196	(E) 224

7. Een auto met 5 banden, waarvan 1 reserveband, rijdt 10000 kilometer zodat elke band evenveel gebruikt wordt. Hoeveel kilometer werd met elke band gereden?

(A) 2000	(B) 2500	(C) 7500	(D) 8000	(E) 10000

8. $M(x)$ betekent: "x is een man"; $A(x)$ betekent: "Rosa houdt van x".
De betekenis van

$$\forall x : M(x) \Rightarrow A(x)$$

is

(A) Alleen mannen houden van Rosa.
(B) Alle mannen houden van Rosa.
(C) Rosa houdt enkel van mannen.
(D) Rosa houdt niet van vrouwen.
(E) Rosa houdt van alle mannen.

9. De vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft wortels x_1 en x_2. Zij $\alpha x^2 + \beta x + 1 = 0$ de vergelijking met wortels $\frac{x_1}{x_2}$ en $\frac{x_2}{x_1}$, dan is β gelijk aan

(A) $2 - \frac{b^2}{ac}$	(B) $\frac{b^2}{ac} - 2$	(C) $2 - \frac{ab^2}{c}$	(D) $2 - \frac{b^2}{c}$	(E) $\frac{b^2}{c} - 2$

10. De verzameling van alle reële getallen kleiner dan of gelijk aan hun omgekeerde, is

(A) $]0, 1]$	(B) $[-1, 1]$	(C) $]-\infty, -1]$
(D) $[-1, 0[\cup]0, 1]$	(E) $]-\infty, -1] \cup]0, 1]$	

11. Hoeveel oplossingen heeft het volgende stelsel in $\mathbb{R}^2$?

$$\begin{cases} |x| + y = 11 \\ x + |y| = 99 \end{cases}$$

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

12. Onderstel dat f en g functies zijn met domein $\mathbb{R}$ en met de eigenschap $f(0) = g(0) = 0$. Beschouw de volgende uitspraken:

- $f(a) = 0 \Rightarrow g(f(a)) = 0$
- $g(f(a)) = 0 \Rightarrow f(a) = 0$
- $g(a) = 0 \Rightarrow g(f(a)) = 0$
- $g(f(a)) = 0 \Rightarrow g(a) = 0$

Hoeveel uitspraken zijn correct?

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

13. Veronderstel dat het stelsel

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ x_3 + x_4 = a_3 \\ x_4 + x_1 = a_4 \end{cases}$$

in de onbekenden x_1, x_2, x_3, x_4 een oplossing heeft. Dan geldt zeker:

(A) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$	(B) $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$
(C) $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$	(D) $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$
(E) De onderstelling is fout; het stelsel heeft geen oplossing.	

14. Noem $\lfloor x \rfloor$ het grootste geheel getal kleiner dan of gelijk aan x. Voorbeelden: $\lfloor \pi \rfloor = 3$ en $\lfloor -\pi \rfloor = -4$. De oplossingenverzameling in $\mathbb{R}$ van $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor \frac{x+2}{2} \rfloor$ is

(A) een open interval	(B) een halfopen interval
(C) een gesloten interval	(D) een singleton
(E) leeg	

15. Gegeven drie punten in het vlak: $m(x_1, y_1)$, $n(x_2, y_2)$ en $p(x_3, y_3)$. De punten a, b en c zijn zodanig dat m het midden is van lijnstuk $[ab]$, n het midden van lijnstuk $[bc]$ en p het midden van lijnstuk $[ca]$. De x-coördinaat van c is gelijk aan

(A) $x_1 + x_2 + x_3$	(B) $x_1 + x_2 - x_3$	(C) $x_2 + x_3 - x_1$
(D) $x_3 + x_1 - x_2$	(E) $x_3 - x_1 - x_2$	

16. Het aantal wortels van de vergelijking $\cos x + \sin x = \dfrac{1}{2}$ met $x \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$ is gelijk aan

(A) 0	(B) 1	(C) 2
(D) 3	(E) geen van de vorige	

17. Het symbool $\bullet$ stelt een cijfer voor. Als $\bullet 3 \times 6528 = 3\bullet \times 8256$, dan staat het symbool $\bullet$ voor

(A) 2	(B) 4	(C) 6	(D) 7	(E) 9

18. Noem x het kleinste getal van drie cijfers, elk verschillend van nul, zodat het product van de cijfers eindigt op nul. De som van de cijfers van x eindigt dan op

(A) 0	(B) 2	(C) 4	(D) 6	(E) 8

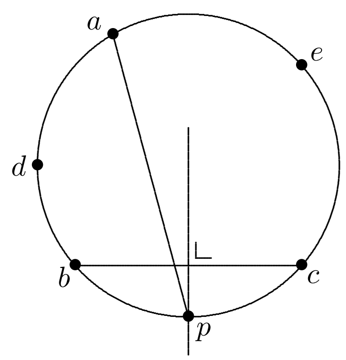
19. In de decimale voorstelling van 2^{1999} staan m cijfers en in deze van 5^{1999} staan n cijfers. De som $m + n$ is

(A) kleiner dan 1998	(B) gelijk aan 1998	(C) gelijk aan 1999
(D) gelijk aan 2000	(E) groter dan 2000	

20. Gegeven twee vierkanten die elk zijden hebben waarvan de lengte een geheel getal is (resp. z_1 en z_2). Het verschil tussen de oppervlaktes van beide vierkanten bedraagt 77 (eenheden). Bereken $z_1 + z_2$.

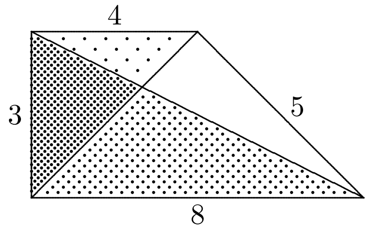
(A) $s \in [1, 10]$	(B) $s \in [11, 20]$	(C) $s \in [21, 40]$
(D) $s \in [41, 80]$	(E) er meer dan één oplossing is	

21. Op een cirkel beschouwt men, zoals op de figuur, de bogen $\overset{\frown}{adb}$ (130°) en $\overset{\frown}{aec}$ (150°). De middelloodlijn van $[bc]$ snijdt de cirkel ondermeer in het punt p (zie figuur). De scherpe hoek die deze middelloodlijn maakt met pa is gelijk aan



(A) 5°	(B) 10°	(C) 15°	(D) 20°	(E) 25°

22. Een rechthoekig trapezium heeft zijden met lengten zoals op de figuur hiernaast aangegeven. De twee diagonalen verdelen het trapezium in vier driehoeken (zie figuur). De oppervlaktes van deze vier driehoeken verhouden zich als de getallen

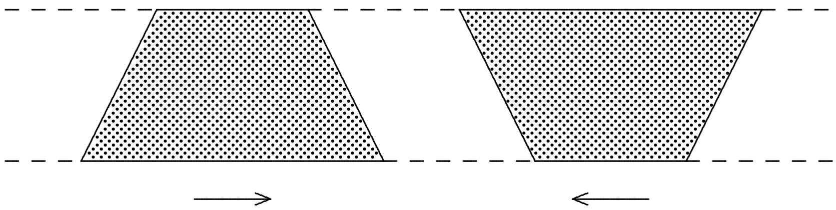


(A) $1, 1, 2, 4$	(B) $1, 1, 3, 4$	(C) $1, 2, 3, 4$	(D) $1, 2, 2, 4$	(E) $2, 2, 3, 4$

23. In het vlak tekent men een gelijkzijdige driehoek abc. Waar moet de oorsprong van het vectorvlak gekozen worden opdat $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$?

(A) In één van de hoekpunten van de driehoek.
(B) Op de omgeschreven cirkel van de driehoek.
(C) In het spiegelbeeld van a t.o.v. bc.
(D) In het spiegelbeeld van b t.o.v. ac.
(E) In het spiegelbeeld van c t.o.v. ab.

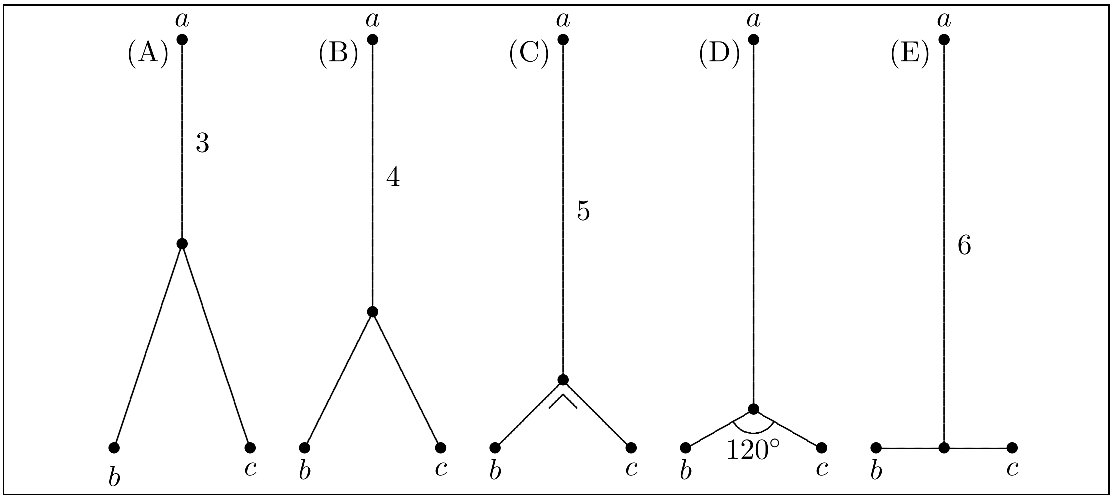
24. Twee congruente gelijkbenige trapezia, waarvan de kleinste basis a even lang is als de opstaande zijden en de grootste basis dubbel zo lang, schuiven tussen twee rechten die in het verlengde van deze basissen liggen (zie figuur). In een bepaalde positie is de oppervlakte van het overlappend gedeelte maximaal. Hoe groot is deze oppervlakte dan?



(A) a^2	(B) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$	(C) $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$	(D) $\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{4}$	(E) $\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{8}$

25. Drie dorpen a, b en c moeten met rechte wegen verbonden worden. De afstand tussen b en c is 2 km; a is 6 km verwijderd van de rechte bc en ligt op de middelloodlijn van $[bc]$. Men beslist een punt te kiezen op die middelloodlijn en dit met de drie dorpen te

verbinden. Welke van de 5 keuzes (zie figuur) levert de kleinste totale weglengte op?



26. In een orthonormaal assenstelsel is de richtingscoëfficiënt van de bissectrice van de scherpe hoek tussen de rechten $y = x$ en $y = 2x$ gelijk aan

(A) $1 + \sqrt{2}$	(B) $\frac{4}{3}$	(C) $\frac{\sqrt{10}+1}{3}$	(D) $\sqrt{2}$	(E) $\frac{3}{2}$

27. Gegeven: $f_1(x) = 1 - |x|$. Definieer: $\forall n > 1 : f_n(x) = 1 - |f_{n-1}(x)|$.
Bepaal $f_{1999}(1999)$.

(A) 0	(B) 1	(C) -1	(D) 1999	(E) -1998

28. Beschouw reële getallen x en y met som 1. Noem $A = x^2 + y$ en $B = x + y^2$. Onderzoek de volgende uitspraken:
I. $A = B$ voor elke keuze van x en y.
II. $A \neq B$ voor zekere keuzes van x en y.
III. $A \leq 1$ voor elke keuze van x en y.
IV. $A > 1$ voor zekere keuzes van x en y.

De enige correcte uitspraken zijn

(A) I	(B) II	(C) I en III	(D) I en IV	(E) II en III

29. De zwaartepunten van de zijvlakken van een viervlak *abcd* vormen een nieuw viervlak V_z. De middens van de ribben van het viervlak *abcd* vormen de hoekpunten van een convex lichaam L_m. Het quotiënt van de inhouden van L_m en V_z is

(A) 4	(B) 6	(C) 9	(D) 13,5	(E) 18

30. Vijf mensen (A, B, C, D en E) zijn ofwel rechter, ofwel advocaat. Rechters spreken altijd de waarheid, advocaten liegen altijd. Verder is geweten

- A is rechter;
- B beweert dat ook hij rechter is;
- C beweert dat D rechter is;
- D beweert dat B en E niet allebei rechter zijn;
- E beweert dat A en B rechter zijn.

Hoeveel rechters telt het gezelschap?

(A) 2	(B) 3	(C) 4
(D) 5	(E) niet af te leiden	