1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1997-1998: Tweede ronde.

De tweede ronde bestaat eveneens uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem is hetzelfde als dat voor de eerste ronde, d.w.z. per goed antwoord krijgt de deelnemer 5 punten, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 1 punt en een foutief antwoord wordt als 0 aangerekend. De voorzien antwoordduur bedraagt nu evenwel slechts 2 uur.

1.1 De problemen

1. Een moeder zegt: “Al mijn kinderen hebben ten minste één broer en ten minste één zus”. Hoeveel kinderen heeft ze minstens?

(A) 2	(B) 3	(C) 4	(D) 5	(E) 6

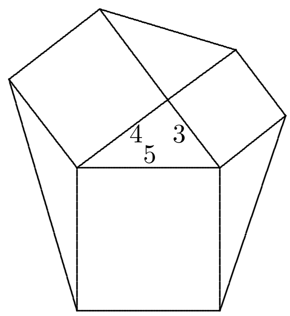
2. Hoeveel verschillende gehele waarden kan $3 - 3\,|\cos x|$ aannemen?

(A) 2	(B) 3	(C) 4	(D) 6	(E) 7

3. Noteer $\lfloor a \rfloor$ het grootste geheel getal kleiner dan of gelijk aan a. B.v. $\lfloor 1998 \rfloor = 1998$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ en $\lfloor -\pi \rfloor = -4$. De oplossingenverzameling in $\mathbb{R}$ van de vergelijking $\lfloor 2x \rfloor = 3$ is

(A) $[1, \frac{3}{2}[$	(B) $[\frac{3}{2}, 2[$	(C) $[2, 3[$	(D) $[3, 4[$	(E) $[6, 8[$

4. Een zeshoek (zie figuur) wordt door een aantal lijnstukken verdeeld in vier driehoeken en drie vierkanten. De zijden van de binnenste driehoek hebben lengte 3, 4 en 5. Hoeveel van deze zeven figuren hebben oppervlakte 6?



(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) geen enkele

5. Op hoeveel manieren kan de oppervlakte van een rechthoek gehalveerd worden met behulp van een rechte lijn?

(A) 2	(B) 4	(C) 6	(D) 8	(E) meer dan 8

6. Twaalf positieve getallen worden genummerd. Het vierde getal is 4, het twaalfde is 12. De som van elke drie opeenvolgende getallen is 333. Het zevende getal is

(A) 4	(B) 7	(C) 12
(D) 317	(E) niet te bepalen	

7. Welk van de vijf volgende getallen is het kleinst?

(A) $\sqrt[30]{30}$	(B) $\sqrt[6]{2}$	(C) $\sqrt[10]{3}$	(D) $\sqrt[12]{4}$	(E) $\sqrt[15]{5}$

8. Hoe kan het tekenverloop van een veeltermfunctie van de derde graad er *niet* uitzien?

(A)

x		x_1		x_2		x_3	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

(B)

x		x_1		x_2	
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

(C)

x		x_1		x_2	
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

(D)

x		x_1	
$f(x)$	$-$	0	$+$

(E)

x		x_1	
$f(x)$	$-$	0	$-$

9. Gegeven is de volgende uitspraak over de natuurlijke getallen:

$$\forall\, x \text{ even: } x^2 + x \text{ is even.}$$

De negatie (ontkenning) hiervan is:

(A) $\forall\, x$ even: $x^2 + x$ is oneven.
(B) $\forall\, x$ oneven: $x^2 + x$ is even.
(C) $\forall\, x$ oneven: $x^2 + x$ is oneven.
(D) $\exists\, x$ even: $x^2 + x$ is oneven.
(E) $\exists\, x$ oneven: $x^2 + x$ is oneven.

10. $\dfrac{\cos^3 15^\circ + \sin^3 15^\circ}{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}$ is gelijk aan

(A) 0	(B) $\frac{1}{4}$	(C) $\frac{1}{2}$	(D) $\frac{3}{4}$	(E) 1

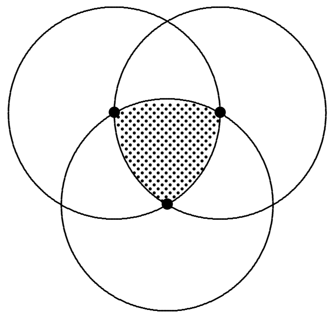
11. Voor hoeveel natuurlijke getallen n is de uitspraak $2^n > n^3$ onjuist?

(A) 2	(B) 4	(C) 6	(D) 8	(E) meer dan 8

12. Een fietser rijdt een heuvel op met een snelheid van 16 km/h. Hij keert onmiddellijk langs dezelfde weg terug met een snelheid van 48 km/h. De gemiddelde snelheid in km/h, over het gehele traject, is

(A) 12	(B) 24
(C) 30	(D) 32
(E) niet te bepalen omdat de afgelegde weg onbekend is.	

13. Drie cirkels met straal 1 snijden elkaar zo dat elke cirkel door de middelpunten van beide andere cirkels gaat. De gearceerde oppervlakte (zie figuur) is gelijk aan

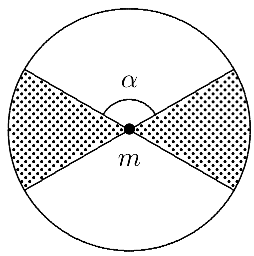


(A) $\frac{3\pi}{4} - \sqrt{3}$	(B) $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$	(C) $\frac{\pi - 1}{2}$
(D) $\frac{\pi + 1}{2}$	(E) geen van de vorige	

14. De vergelijking $\sqrt{x-p} = x$ heeft twee verschillende reële wortels als en slechts als p behoort tot

(A) $]-\infty, 0]$	(B) $]-\infty, \frac{1}{4}[$	(C) $]-\infty, \frac{1}{4}]$
(D) $[0, \frac{1}{4}[$	(E) $]\frac{1}{4}, +\infty[$	

15. De gearceerde figuur heeft dezelfde omtrek als de gegeven cirkel met middelpunt m. Hoe groot is de hoek α, uitgedrukt in radialen?



(A) 2	(B) 3	(C) $\frac{\pi}{2}$	(D) $\frac{2\pi}{3}$	(E) $\frac{3\pi}{4}$

16. Het aantal verschillende reële oplossingen van de vergelijking $4 - x^2 = \frac{1}{x^3}$ is

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

17. Als $f(x) = x - 1$ en $(g \circ f)(x) = x^2 - 1$, dan is $g(3)$ gelijk aan

(A) 3	(B) 4	(C) 8	(D) 9	(E) 15

18. Een man heeft in totaal 2800 kinderen, kleinkinderen, achterkleinkinderen en achter-achterkleinkinderen. Ze zijn allen nog in leven. De achter-achterkleinkinderen hebben zelf nog geen kinderen. Alle anderen hebben elk precies hetzelfde aantal kinderen als de man zelf. Hoeveel kinderen heeft deze man?

(A) 5	(B) 6	(C) 7	(D) 8	(E) 9

19. Een broze stok van 70 cm breekt in twee. Aan beide uiteinden (telkens 10 cm) kan de stok niet breken. Alle plaatsen waar de stok kan breken zijn even waarschijnlijk. Wat is de kans dat het verschil tussen het grootste en het kleinste deel van de stok minstens 10 cm is?

(A) 40%	(B) 50%	(C) 60%	(D) 70%	(E) 80%

20. Als x en y voldoen aan

$$\begin{cases} 83249\,x + 16751\,y &= 108249 \\ 16751\,x + 83249\,y &= 41751 \end{cases}$$

dan is $\dfrac{x}{y}$ gelijk aan

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

21.

$$\frac{2}{0,1998\,1998\,1998\ldots} + \frac{2}{0,01998\,1998\,1998\ldots} + \frac{2}{0,001998\,1998\,1998\ldots}$$

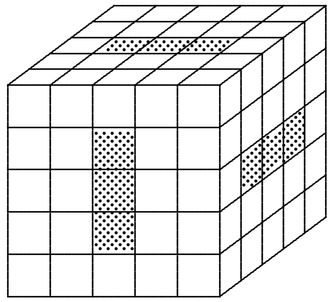
is een natuurlijk getal. Welk van de volgende getallen is een priemfactor van dat getal?

(A) 2	(B) 3	(C) 5	(D) 7	(E) 11

22. De lengte van de kortste diagonaal van een regelmatige n-hoek, ingeschreven in een cirkel met straal 1, is

(A) $\sin\dfrac{\pi}{n}$	(B) $2\sin\dfrac{\pi}{n}$	(C) $\sin\dfrac{2\pi}{n}$	(D) $2\sin\dfrac{2\pi}{n}$	(E) $2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{n}$

23. Een kubus is opgebouwd uit 125 congruente kubusjes. De kubus wordt doorboord op drie plaatsen, de gaten zijn rechthoekig (zie figuur). Hoeveel kubusjes blijven er zo over?



(A) 80	(B) 86	(C) 88	(D) 89	(E) 116

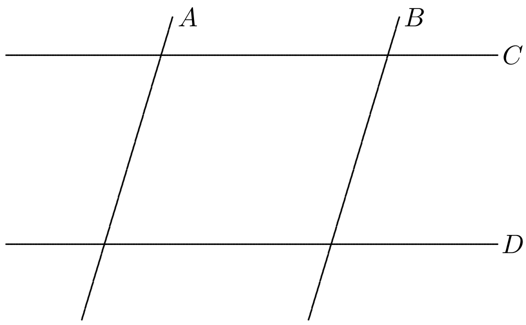
24. In een proces zijn er vier beklaagden. Er staat vast dat

- als A schuldig is, dan is B ook schuldig;
- als B schuldig is, dan volgt dat C ook schuldig is of dat A onschuldig is;
- als D onschuldig is, dan volgt dat A schuldig is en dat C onschuldig is;
- als D schuldig is, dan is A ook schuldig.

Het aantal schuldigen is dus gelijk aan

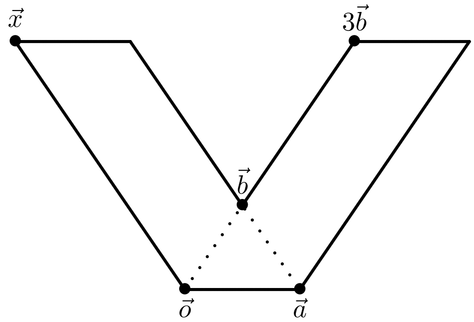
(A) 1	(B) 2	(C) 3
(D) 4	(E) niet te bepalen uit de gegevens.	

25. A, B, C en D vormen een parallellogram zoals op de figuur hiernaast. Stel door S_A de loodrechte spiegeling voor t.o.v. A. Dan is $S_A \circ S_B \circ S_C \circ S_D$ een



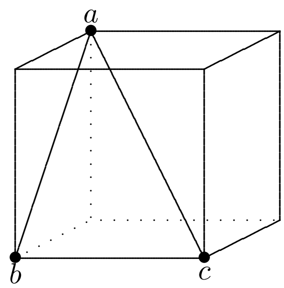
(A) verschuiving	(B) loodrechte spiegeling
(C) puntspiegeling	(D) homothetie
(E) draaiing over een hoek verschillend van 180°.	

26. Twee congruente parallellogrammen die één zijde gemeen hebben, vormen de letter V zoals op de figuur. Rekening houdend met de benaming van de hoekpunten, is de vector $\vec{x}$ gelijk aan



(A) $-3\vec{b}$	(B) $2\vec{a}-3\vec{b}$	(C) $3\vec{b}-2\vec{a}$	(D) $3\vec{b}-3\vec{a}$	(E) $\vec{a}-3\vec{b}$

27. Gegeven een kubus. Welke uitspraak over driehoek abc (zie figuur) is correct?



(A) Hij is gelijkbenig en stomp.
(B) Hij is gelijkbenig en scherp
(C) Hij is gelijkbenig en rechthoekig
(D) Hij is rechthoekig met drie verschillende zijden.
(E) Hij is niet gelijkbenig, noch rechthoekig en heeft drie verschillende zijden.

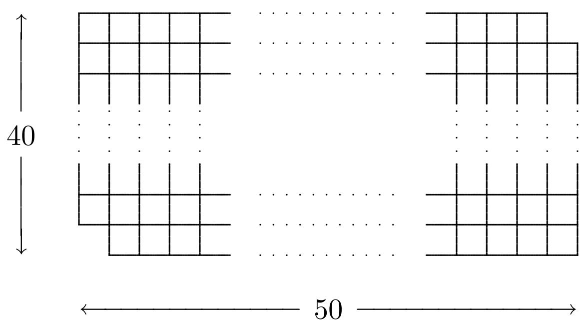
28. In een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 3 en 4, trekt men vanuit de rechte hoek de zwaartelijn (voetpunt z) en de hoogtelijn (voetpunt h). De afstand tussen z en h bedraagt

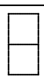
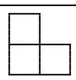
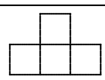
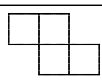
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{7}{10}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) 1

29. Het aantal natuurlijke getallen n waarvoor $(n^2-2n)^{n^2+47} = (n^2-2n)^{16n-16}$ is gelijk aan

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

30. Van een blad met 40 bij 50 ruitjes wordt in twee overstaande hoeken een ruitje weggeknipt. Met welke vorm van papiersnippers kan je de 1998 overblijvende ruitjes zonder overlapping bedekken?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E)