1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1996–1997: Tweede Ronde.

De tweede ronde bestaat eveneens uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem werkt (opnieuw) als volgt : een deelnemer start met 30 punten. Per goed antwoord krijgt hij of zij 5 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 1 punt en een foutief antwoord wordt als 0 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt evenwel slechts 2 uur.

1.1 De problemen.

1. Het omgekeerde van $3 + \sqrt{10}$ is gelijk aan

(A) $3 - \sqrt{10}$	(B) $-3 - \sqrt{10}$	(C) $\sqrt{10} + 3$	(D) $\sqrt{10} - 3$	(E) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

2. Het getal $\sqrt{12^{12}}$ is gelijk aan

(A) 6^6	(B) $(2\sqrt{3})^{12}$	(C) 6^{12}
(D) $12^{2\sqrt{3}}$	(E) geen van de vorige resultaten	

3. De ruimtediagonaal van een kubus heeft lengte 3. Hoe groot is de inhoud van die kubus?

(A) 1	(B) $\sqrt{3}$	(C) 3
(D) $3\sqrt{3}$	(E) geen van de vorige resultaten	

4. In welke regelmatige veelhoek is de kortste diagonaal even lang als de straal van de omgeschreven cirkel?

(A) zeshoek	(B) achthoek	(C) tienhoek
(D) twaalfhoek	(E) vijftienhoek	

5. In driehoek abc is $|bc| = 6$, $|ac| = 9$ en $\hat{a} = 30°$. Welk van de volgende uitspraken is correct?

(A) Hoek $\hat{b}$ is scherp.	(B) Hoek $\hat{b}$ is stomp.
(C) Hoek $\hat{b}$ is recht.	(D) Hoek $\hat{b}$ kan scherp of stomp zijn.
(E) Een dergelijke driehoek kan niet geconstrueerd worden.	

6. Een eerste man heeft 16 saffieren (van gelijke waarde), een tweede heeft 10 robijnen (van gelijke waarde) en een derde heeft 8 diamanten (eveneens van gelijke waarde). Ieder van hen geeft aan elke andere twee edelstenen van het soort dat hij zelf oorspronkelijk bezat; dan bezitten ze elk edelstenen ter waarde van 270 000 BEF. Wat is de waarde van 1 diamant?

(A) 20 000 BEF	(B) 40 000 BEF	(C) 50 000 BEF
(D) 100 000 BEF	(E) 120 000 BEF	

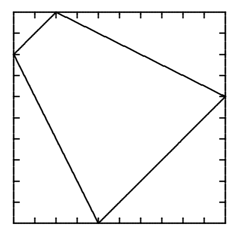
7. Hoeveel is $\left(\frac{1999}{6}\right)^2 - \left(\frac{1997}{6}\right)^2$?

(A) $\frac{1}{9}$	(B) $\frac{2}{3}$	(C) 111	(D) 222	(E) 1332

8. Hoeveel priemgetallen bestaan er die op twee verschillende manieren als de som van twee priemgetallen kunnen worden geschreven? Hierbij speelt de volgorde van de termen geen rol. (Priemgetallen zijn positief!)

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) meer dan 3

9. Een gelijkbenig trapezium is ingeschreven in een vierkant met zijde 10 zoals in de figuur hiernaast. De oppervlakte van het trapezium is gelijk aan



(A) 46	(B) 48	(C) 50	(D) 52	(E) 54

10. Onderstel dat de vergelijking $x^2 + ax + b = 0$ twee gehele oplossingen heeft. Beschouw de volgende uitspraken.

I. beide oplossingen zijn oneven $\Longleftrightarrow$ a en b zijn oneven
II. beide oplossingen zijn oneven $\Longleftrightarrow$ a is even en b is oneven
III. beide oplossingen zijn oneven $\Longleftrightarrow$ a is oneven en b is even
IV. één oplossing is even en de andere oneven $\Longleftrightarrow$ a is oneven en b is even
V. één oplossing is even en de andere oneven $\Longleftrightarrow$ a is even en b is oneven
VI. één oplossing is even en de andere oneven $\Longleftrightarrow$ a en b zijn oneven

Welke uitspraken zijn juist?

(A) I en IV	(B) II en IV	(C) I en V
(D) III en V	(E) II en VI	

11. De oplossingenverzameling in $\mathbb{R}$ van de ongelijkheid $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} > x - 2$ is

(A) $\mathbb{R}$	(B) $\mathbb{R}_0^+$	(C) $\mathbb{R}^+$
(D) $]-\infty, -2] \cup]0, +\infty[$	(E) $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$	

12. De grafiek van een willekeurige functie $y = f(x)$, in een orthonormaal assenstel, wordt evenwijdig met de eerste bissectrice verschoven over een afstand $\sqrt{2}$ (zodanig dat de x- en de y-waarden van elk punt groter worden). Het voorschrift van de nieuwe functie is

(A) $y = f(x+1)+1$	(B) $y = f(x-1)+1$
(C) $y = f(x)+\sqrt{2}$	(D) $y = f(x+\sqrt{2})+\sqrt{2}$
(E) $y = f(x-\sqrt{2})+\sqrt{2}$	

13. Hoeveel reële getallen bestaan er die precies 1 verschillen met hun omgekeerde?

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 4	(E) oneindig veel

14. Voor $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ neemt de functie $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$ het volgende aantal gehele waarden aan.

(A) 0	(B) 1
(C) 2	(D) een eindig aantal groter dan 2
(E) oneindig veel	

15. Zij $a, b, c \in \mathbb{N}_0$. Als bij deling van a door b het quotiënt q is en de rest r en als bij deling van q door c het quotiënt q' is en de rest r', dan is de rest bij deling van a door bc gelijk aan

(A) r	(B) r'	(C) rr'
(D) $br' + r$	(E) niet te bepalen vanuit de gegevens	

16. Op hoeveel manieren kun je $\dfrac{1}{14}$ schrijven als $\dfrac{a}{7} + \dfrac{b}{2}$ met a en b gehele getallen?

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) meer dan 3

17. Welke van de volgende ongelijkheden is correct? (Merk op: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

(A) $2^{3^2} < 2^{3^3} < 3^{2^2} < 3^{2^3} < 3^{3^2}$	(B) $3^{2^2} < 3^{2^3} < 2^{3^2} < 2^{3^3} < 3^{3^2}$
(C) $3^{2^2} < 3^{2^3} < 2^{3^2} < 3^{3^2} < 2^{3^3}$	(D) $3^{2^2} < 2^{3^2} < 3^{2^3} < 2^{3^3} < 3^{3^2}$
(E) $3^{2^2} < 2^{3^2} < 3^{2^3} < 3^{3^2} < 2^{3^3}$	

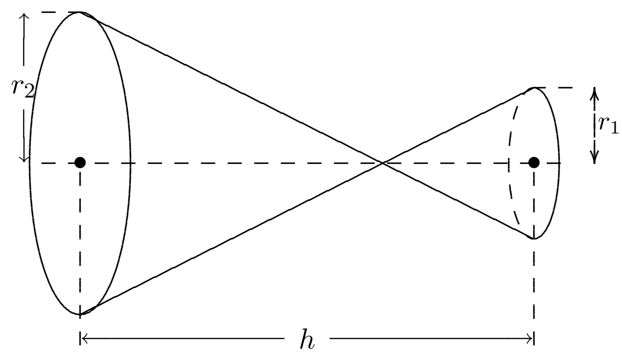
18. Zij $A = \{a, b, c\}$. Het aantal afbeeldingen $f : A \to A$ zodanig dat $f \circ f = f$ is gelijk aan

(A) 1	(B) 4	(C) 7	(D) 10	(E) 13

19. Een strook papier verdeel je in vijf gelijke delen. Twee delen bewaar je, één deel gooi je weg en met de overblijvende twee delen herhaal je dezelfde procedure. Hoeveel bewaar je uiteindelijk van de strook wanneer je dezelfde procedure blijft herhalen?

(A) $\frac{7}{15}$	(B) $\frac{2}{3}$	(C) $\frac{1}{2}$	(D) $\frac{3}{5}$	(E) $\frac{4}{5}$

20. In bijgaande figuur is een dubbele omwentelingskegel voorgesteld. Zijn inhoud is gelijk aan



(A) $\frac{h}{3}\pi(r_1^2 + r_2^2)$
(B) $\frac{h}{3}\pi(r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2)$
(C) $\frac{h}{3}\pi(r_2^2 - r_1 r_2 + r_1^2)$
(D) $\frac{h}{3}\pi(r_2 + r_1)^2$
(E) $\frac{h}{3}\pi(r_2 - r_1)^2$

21. An, Bert en Chris dragen elk een jeans van verschillende kleur (grijs, blauw, zwart). Bovendien is het volgende geweten:

- Als An een blauwe draagt, dan draagt Bert een grijze.
- Als An een zwarte draagt, dan draagt Chris een grijze.
- Als Bert geen zwarte draagt, dan draagt Chris een blauwe.

Hieruit volgt

(A) Chris draagt een blauwe jeans.
(B) Chris draagt een grijze jeans.
(C) Chris draagt een zwarte jeans.
(D) De beweringen zijn strijdig.
(E) De gegevens zijn niet bepalend voor de kleur van Chris' jeans, er zijn meerdere mogelijkheden.

22. Hoeveel niet-congruente driehoeken bestaan er waarvan de zijden natuurlijke getallen kleiner dan of gelijk aan 5 zijn?

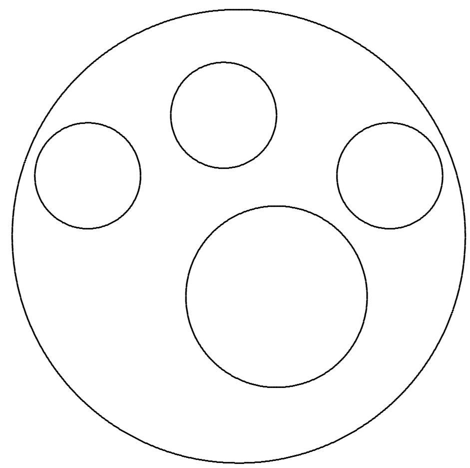
(A) 10	(B) 21	(C) 22	(D) 25	(E) 35

23. De onbekenden a, b en c zijn natuurlijke getallen. Hoeveel oplossingen heeft het stelsel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^3 - b^3 - c^3 & = & 3abc \\ a^2 & = & 2(b+c) \end{array} \right. \quad ?$$

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) oneindig veel

24. De traditionele woning in Burundi is de rugo. Dit is een domein omheind door een cirkelvormige haag, waarbinnen zich vier hutten bevinden, namelijk deze van de ouders (de gezinshut) en de drie kleinere, deze van de jongens, deze van de meisjes en de washut. Alle hutten zijn cirkelvormig en de drie kleinere hebben een diameter welke de helft is van deze van de gezinshut. Uiteraard speelt het leven zich grotendeels buiten af en tracht men de open ruimte zo groot mogelijk te houden. Als D de diameter van het domein is, hoe groot mag dan maximaal de diameter van de gezinshut zijn, zodat er nog $\frac{2}{3}$ van het terrein vrij blijft?



(A) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{14}}D$	(B) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{21}}D$	(C) $\frac{2}{\sqrt{21}}D$	(D) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{21}}D$	(E) $\frac{2}{\sqrt{15}}D$

25. Noem a, b en c de lengten van de zwaartelijnen van een rechthoekige driehoek zodat $a \geq b \geq c$. Dan is $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$ gelijk aan

(A) 2	(B) $\frac{5}{2}$	(C) 3	(D) 4	(E) 5

26. René zit in het tweede jaar en krijgt de volgende toetsvraag:

Vul in, $||$ of $\perp$, zodat de volgende uitspraak waar is voor alle rechten A, B en C van het vlak.

(a) $A \ \ldots \ A$

(b) $A \,||\, B$ *en* $B \ \ldots \ C \Longrightarrow A \ \ldots \ C$

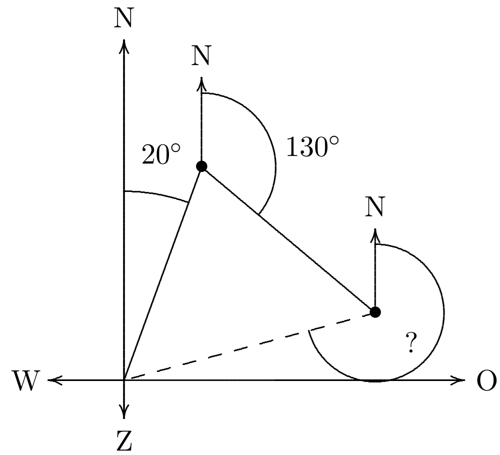
René heeft weeral eens zijn les niet geleerd en gokt er maar op los. Wat is de kans dat hij de vraag helemaal correct oplost?

(A) 0	(B) $\frac{1}{8}$	(C) $\frac{1}{6}$	(D) $\frac{1}{4}$	(E) $\frac{1}{2}$

27. Als $\operatorname{tg} x = \sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$, met $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ en $x \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$, dan is $\dfrac{a}{\cos x} + \dfrac{b}{\sin x} =$

(A) $(a^3 + b^3)^{1/3}$	(B) $(a^{3/2} + b^{3/2})^{2/3}$	(C) $a + b$
(D) $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$	(E) $(a^{1/3} + b^{1/3})^3$	

28. Een expeditie vertrekt vanuit het basiskamp en gaat 10 km in 20° NO-richting. Daarna gaat ze opnieuw 10 km, maar in 130° ZO-richting. Hoeveel graden moet de expeditie nu gaan om in rechte lijn naar het basiskamp terug te keren?

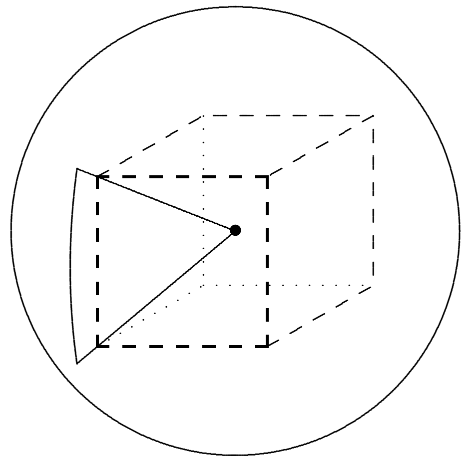


(A) 235°	(B) 240°	(C) 250°	(D) 255°	(E) 260°

29. Beschouw alle getallen bestaande uit n cijfers die gekozen worden in de verzameling $\{1, 2, 3, 4\}$ en waarvoor geldt dat er op geen enkele plaats rechts van een 4 een 3 mag voorkomen. B.v. de getallen met 6 cijfers 123314 en 113424 voldoen, terwijl 114234 niet voldoet. Als a_n het aantal dergelijke getallen van n cijfers is, dan geldt voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ de volgende betrekking.

(A) $a_{n+1} = 4a_n - 1$	(B) $a_{n+1} = 4a_n - 6^{n-1}$
(C) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 6a_n$	(D) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - \dfrac{3}{2}a_n$
(E) $a_{n+1} = 3a_n + 3^n$	

30. Gegeven is een bol met straal R en een kubus met hetzelfde middelpunt. De twaalf ribben van de kubus worden vanuit het middelpunt op het boloppervlak geprojecteerd, zodat de twaalf ontstane cirkelbogen het boloppervlak verdelen in zes congruente gebieden. Stel door α en β de scherpe hoeken voor zodat $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \cos\beta$. De omtrek van elk van die gebieden is



(A) $4R\alpha$	(B) $4R\beta$	(C) $4R(\alpha+\beta)$
(D) $8R\alpha$	(E) $8R\beta$	