1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1995-1996 : Tweede Ronde.

De tweede ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen, opgemaakt door de jury van VWO. Het quoteringssysteem werkt als volgt : een deelnemer start met 30 punten. Per goed antwoord krijgt hij of zij 4 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 0 punten en een foutief antwoord wordt als -1 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 2 uur.

1.1 De problemen.

Volgende benaderingen kunnen nuttig zijn bij het oplossen van sommige vragen.

$\boxed{\sqrt{2} \approx 1,4142}$ $\boxed{\sqrt{3} \approx 1,7321}$ $\boxed{\sqrt{5} \approx 2,2361}$ $\boxed{\sqrt{7} \approx 2,6458}$ $\boxed{\pi \approx 3,1416}$

1. Hoeveel verschillende geldige antwoordpatronen zijn er mogelijk bij deze ronde van de Vlaamse Wiskunde Olympiade?

(A) $30 \cdot 6!$	(B) 5^{30}	(C) 180	(D) 30^6	(E) 6^{30}

2. Als een diagonaal van een vierkant lengte 2 heeft, dan is de oppervlakte van het vierkant gelijk aan

(A) $\sqrt{2}$	(B) 2	(C) $2\sqrt{2}$	(D) 4	(E) $4\sqrt{2}$

3. Beschouw de functies:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \frac{x}{4}, \quad h(x) = 4x - 8.$$

Dan is $(h \circ g \circ f)(x)$ gelijk aan

(A) $\sqrt{x-2}$	(B) $\sqrt{x-8}$	(C) $2\sqrt{x} - 8$	(D) $\sqrt{x} - 8$	(E) $\sqrt{x} - 2$

4. In een gelijkbenige driehoek met tophoek 120° beschouwen we alle hoogtelijnen, zwaartelijnen en binnenbissectrices uit de drie hoekpunten. Hoeveel verschillende rechten zijn dit?

(A) 9	(B) 7	(C) 6	(D) 5	(E) 3

5. Hoeveel van de volgende veeltermen kunnen ontbonden worden als een produkt van veeltermen met reële coëfficiënten en van strikt lagere graad?

$$x^2 + 4, \quad x^3 + 8, \quad x^4 + 16, \quad x^5 + 32$$

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

6. Wat is het laatste cijfer van de volgende som?

$$S = 1! + 2! + 3! + \ldots + 1995! + 1996!$$

(Voor $n \in \mathbb{N}_0 : n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.)

(A) 9	(B) 7	(C) 5	(D) 3	(E) 1

7. Hoeveel natuurlijke getallen kleiner dan 100 hebben minstens 4 verschillende priemdelers?

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 5

8. Een blad papier is vierkant geruit. Hoeveel niet-congruente samenhangende figuren kan men tekenen die precies 4 volledige ruitjes bevatten? (Twee ruitjes noemen aanliggend als ze een gemeenschappelijke zijde hebben. Een figuur heet samenhangend wanneer men van elk ruitje naar elk ander ruitje kan gaan via opeenvolgende aanliggende ruitjes.)

(A) 3	(B) 4	(C) 5	(D) 6	(E) 7

9. Beschouw de volgende 3 uitspraken:
   I. Als een vierhoek, ingeschreven in een cirkel, gelijkzijdig is, dan zijn al zijn hoeken gelijk.
   II. Als een vierhoek, ingeschreven in een cirkel, gelijke hoeken heeft, dan zijn al zijn zijden gelijk.
   III. Als een vierhoek, omgeschreven aan een cirkel, gelijkzijdig is, dan zijn al zijn hoeken gelijk.

   Er geldt:

(A) I, II en III zijn juist.	(B) I en II zijn juist, III is fout.
(C) I en III zijn juist, II is fout.	(D) Enkel I is juist.
(E) Geen enkele uitspraak is juist.	

10. Hoeveel natuurlijke getallen n bestaan er ($0 \leq n \leq 1996$) zodat $\sqrt[3]{96n}$ een natuurlijk getal is?

(A) 4	(B) 5	(C) 6	(D) 110	(E) 111

11. Een kegelvormig reservoir heeft een hoogte van 1 m en een grondvlakdiameter van 2 m. Wanneer het reservoir recht op zijn punt staat, bereikt de vloeistof een maximale hoogte van x m. Op de wand wordt een merkteken aangebracht ter hoogte van het

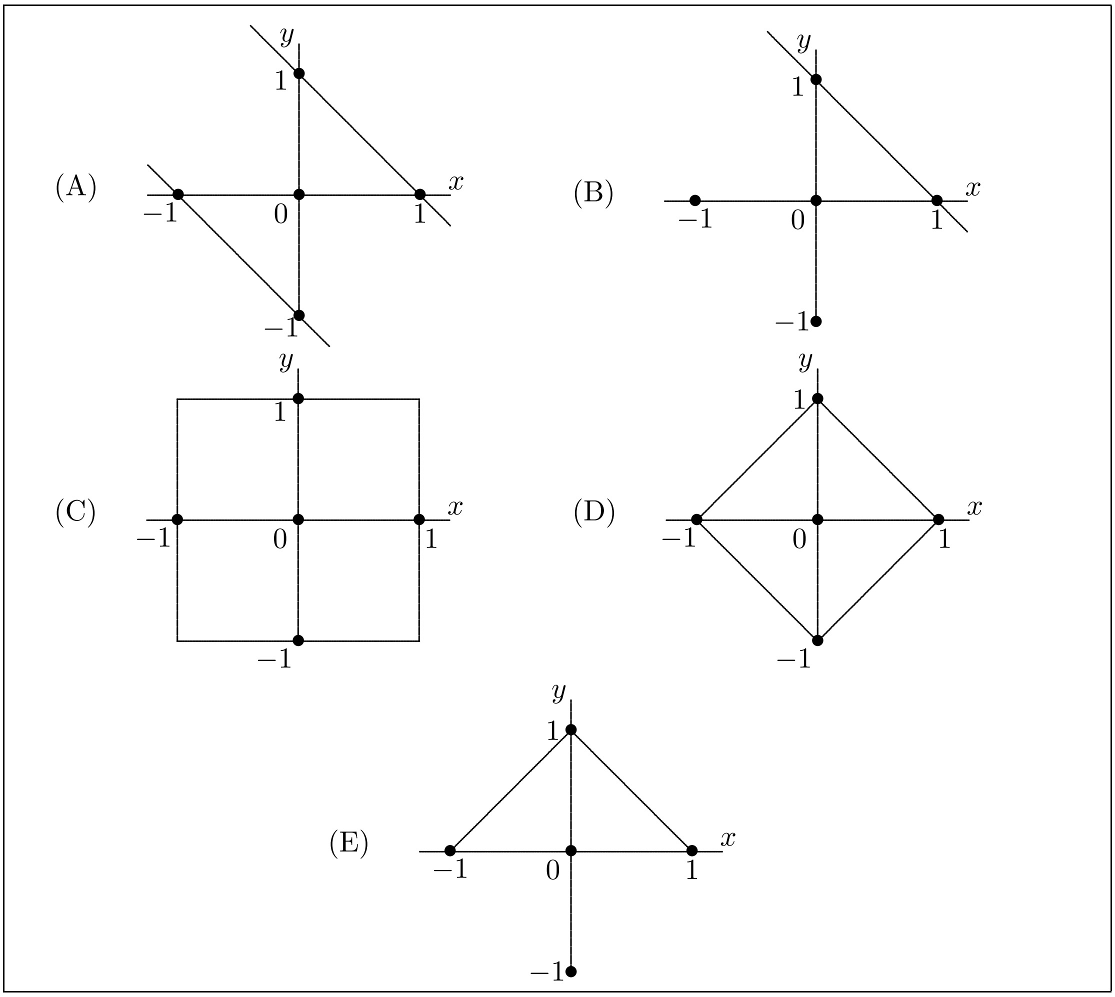
vloeistofoppervlak. Het reservoir wordt nu met de punt omhoog gezet en de vloeistof stabiliseert zich weer op de hoogte van het merkteken. Bereken x.

(A) $x = \frac{1}{2}$	(B) $x = \frac{2}{3}$	(C) $x = \frac{3}{4}$	(D) $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$	(E) $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

12. Het aantal oplossingen in $\mathbb{R}$ van de vergelijking $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$ is

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

13. De verzameling van de punten (x, y) in het vlak die voldoen aan $|x| + |y| = 1$ wordt voorgesteld door



14. Hoeveel oplossingen in $\mathbb{Z}^2$ bezit het stelsel $\begin{cases} x^2 - y < -1 \\ x^2 + y < 5 \end{cases}$?

(A) 2	(B) 3	(C) 4	(D) 5	(E) meer dan 5

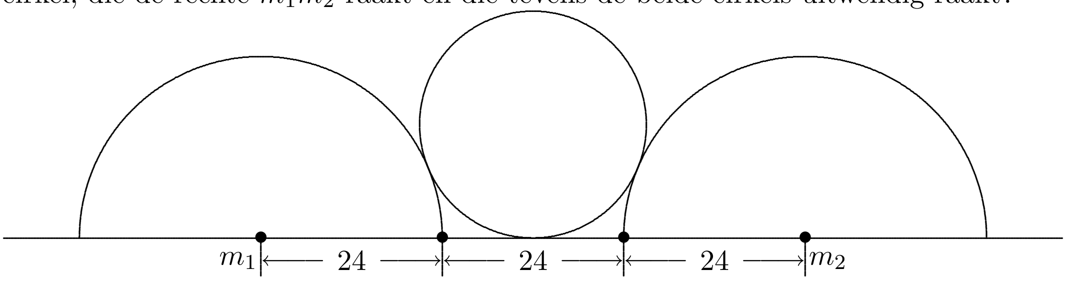
15. Als $(3x^2-2x-1)^4 = a_8x^8+a_7x^7+\ldots+a_1x+a_0$, dan is de waarde van $a_8+a_6+a_4+a_2$ gelijk aan

(A) 256	(B) 255	(C) 254	(D) 128	(E) 127

16. Hoeveel koppels gehele getallen (n,k) bestaan er met de eigenschap dat $1 = 3n+5k$?

(A) 0	(B) 7	(C) 8	(D) 15	(E) oneindig veel

17. De middelpunten m_1 en m_2 van twee cirkels met straal 24 worden verbonden door een rechte. Die cirkels snijden het lijnstuk $[m_1m_2]$ in nog twee punten zodanig dat het lijnstuk $[m_1m_2]$ in precies drie gelijke delen verdeeld wordt. Hoe groot is de straal van de cirkel, die de rechte m_1m_2 raakt en die tevens de beide cirkels uitwendig raakt?



(A) 12	(B) $10\sqrt{2}$	(C) 15	(D) 16	(E) 18

18. In een orthonormaal assenstelsel beschouwen we twee parabolen die congruent zijn met de parabool met vergelijking $y = x^2$. De ene is een parabool met de holle zijde naar boven en met de top in $(0,1)$. De andere is een parabool met de holle zijde naar beneden en met de top in $(2,0)$. Een rechte evenwijdig met de y-as snijdt deze 2 parabolen in a en b. Wat is de kortste afstand tussen a en b?

(A) 1	(B) 2	(C) $\sqrt{5}$	(D) 3	(E) 4

19. Van drie beweringen A, B en C is het volgende geweten:

- Als A juist is, dan zijn B en C juist.
- Als B juist is, dan is er van A en C tenminste één juist.
- Als C juist is, dan is A juist en B fout.

Welke van de beweringen A, B, C zijn dan juist?

(A) enkel A	(B) enkel B	(C) enkel C
(D) geen enkele	(E) allemaal	

20. In de gelijkbenige driehoek abc met tophoek b van 120° trekt men de bissectrice van de hoek in a. Deze verdeelt het lijnstuk $[bc]$ in twee delen, waarvan de verhouding van de grootste lengte tot de kleinste lengte gelijk is aan

(A) 1	(B) $2\frac{\sqrt{3}}{3}$	(C) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	(D) $\sqrt{2}$	(E) $\sqrt{3}$

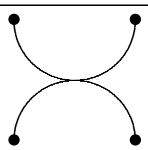
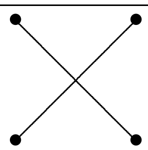
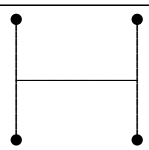
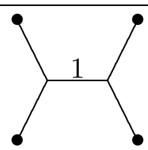
21. Gegeven is een driehoek abc met $|ac| = B$, $|ab| = C$ en $|bc| = A$. Als

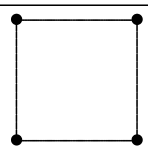
$$\frac{1}{A+B} + \frac{1}{B+C} = \frac{3}{A+B+C},$$

dan is $\widehat{b}$ gelijk aan

(A) 30°	(B) 45°	(C) 60°
(D) 90°	(E) geen van de vorige	

22. Vier dorpen die de hoekpunten vormen van een vierkant met zijde 2, worden met elkaar verbonden door wegen. Welke van de 5 volgende wegenconfiguraties levert de kleinste totale wegafstand (= som van de lengten van de lijnen) op? Elke figuur bevat minstens twee symmetrieassen.

(A)  (B)  (C)  (D) 

(E) 

23. In een driehoek abc is pq de middenparallel ($\parallel bc$, $p \in [ab]$) en r een punt van $[bc]$, zodanig dat $|br| = 2\,|rc|$. Noem s het snijpunt van pq en ar. Als je de oppervlakte van de driehoek aqs als eenheid neemt, dan is de oppervlakte van het trapezium $psrb$ gelijk aan

(A) 3	(B) 4	(C) 5	(D) 6	(E) 7

24. Een vader bezit een aantal goudstukken en verdeelt ze onder zijn 3 zonen. Hij geeft aan de eerste zoon de helft van het aantal stukken plus één en aan de tweede één derde van de overblijvende stukken. Wat is het minimum aantal stukken dat de vader moet bezitten zodat de derde zoon meer dan 10 goudstukken krijgt?

(A) 32	(B) 33	(C) 38	(D) 62	(E) 100

25. Een Egyptische piramide heeft vier gelijkzijdige driehoeken als opstaande zijvlakken. Bepaal de hoek tussen twee overstaande zijvlakken.

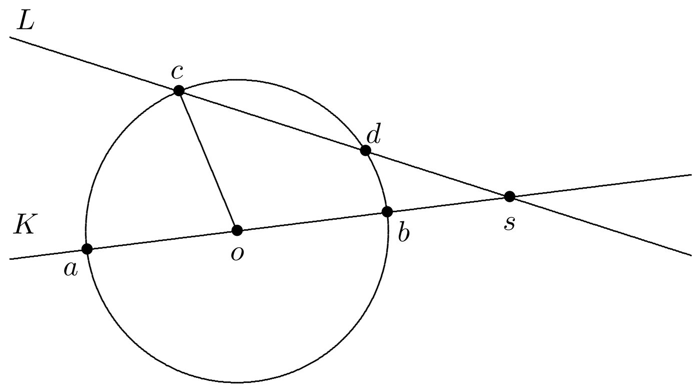
$$(y = \text{Bgcos}x \Leftrightarrow x = \cos y \text{ en } y \in [0,\pi]) \quad (y = \text{Bgsin}x \Leftrightarrow x = \sin y \text{ en } y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$$

(A) $\dfrac{\pi}{4}$	(B) $\dfrac{\pi}{2}$	(C) $\mathrm{Bgcos}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	(D) $\dfrac{\pi}{3}$	(E) $2\mathrm{Bgsin}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

26. Beschouw de getallen 2,4,6,. . . , 1994, 1996. Teken één pijl van getal a naar getal b enkel en alleen als $a < b$. Hoeveel pijlen verkrijg je zo?

(A) 997	(B) 998	(C) 1996	(D) 497503	(E) 498501

27. Een cirkel met middelpunt o en straal r wordt gesneden door twee niet-evenwijdige rechten K en L. Het snijpunt s van deze rechten ligt buiten de cirkel. De rechte K gaat door o en snijdt de cirkel in de punten a en b ($b \in [as]$). De rechte L snijdt de cirkel in de punten c en d ($d \in [cs]$). De lengte $|sd|$ is gelijk aan r. Het verband tussen $\alpha = a\widehat{o}c$ en $\beta = b\widehat{s}d$ is:



(A) $\alpha = 2\beta$	(B) $\alpha = \dfrac{5}{2}\beta$	(C) $\alpha = 3\beta$	(D) $\alpha = \dfrac{7}{2}\beta$	(E) $\alpha = 4\beta$

28. Drie punten in $\mathbb{R}^3$ liggen niet op een rechte. Hoeveel verschillende rechten bestaan er waarvoor geldt dat de drie punten op dezelfde afstand liggen van die rechte?

(A) 1	(B) 3	(C) 4	(D) 6	(E) oneindig veel

29. Hoeveel oplossingen zijn er voor het volgende probleem?

Bepaal drie verschillende natuurlijke getallen $a < b < c$ met de eigenschap dat de som $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ geheel is.

(A) geen	(B) 1	(C) 3	(D) 6	(E) oneindig veel

30. Welke vergelijking heeft $y = \mathrm{tg}10°$ als oplossing?

(A) $\sqrt{3}y^3 - 3y^2 - 3\sqrt{3}y + 1 = 0$	(B) $\sqrt{3}y^3 + 3y^2 + 3\sqrt{3}y + 1 = 0$
(C) $\sqrt{3}y^3 + 3y^2 - 3\sqrt{3}y - 1 = 0$	(D) $\sqrt{3}y^3 - 3y^2 + 3\sqrt{3}y - 1 = 0$
(E) $y^3 - 1 = \sqrt{3}$	