1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1994-1995 : Tweede Ronde.

De Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. is een officiële "foreign coordinator" voor de welbekende AHSME-competitie (American High School Mathematics Examination — USA en Canada). De dertig meerkeuzevragen van de tweede ronde van VWO zijn een vertaling van de AHSME vragen. Ook het quoteringssysteem van AHSME wordt overgenomen. Dit werkt als volgt : 0 punten voor een foutief antwoord, 2 punten voor een blanco antwoord en 5 punten voor een correct antwoord. De voorziene tijdsduur is 90 minuten.

1.1 De problemen.[2]

1. De winkelprijs van een bepaald toestel bedraagt 9999 frank. In een reclamespotje op de televisie wordt hetzelfde toestel aangeboden voor 3 (gespreide) betalingen van telkens 2998 frank en een éénmalige verzendingskost van 998 frank. Hoeveel spaar je door dit toestel aan te kopen bij de TV-adverteerder?

(A) 10 fr.	(B) 9 fr.	(C) 8 fr.	(D) 7 fr.	(E) 6 fr.

2. Als $\sqrt{2+\sqrt{x}} = 3$, dan is x gelijk aan

(A) 121	(B) 49	(C) 7	(D) $\sqrt{7}$	(E) 1

3. Kim behaalde voor haar eerste drie wiskundetoetsen scores 87, 83 en 88. Als zij voor haar vierde toets een score van 90 behaalt, dan zal haar gemiddelde score

(A) toenemen met 1	(B) toenemen met 2	(C) toenemen met 3
(D) toenemen met 4	(E) dezelfde blijven	

4. Een rechthoekig veld is 300 meter breed en 400 meter lang. Aan de hand van lukraak genomen steekproeven blijkt dat er, gemiddeld gezien, 4 mieren per dm^2 op dit veld zijn. Welk van de volgende getallen benadert het best het geschatte totaal aantal mieren in het veld?

(A) 500 duizend	(B) 5 miljoen	(C) 50 miljoen
(D) 500 miljoen	(E) 5 miljard	

5. Als M gelijk is aan 30% van Q, Q gelijk is aan 20% van P en N gelijk is aan 50% van P, dan is $\frac{M}{N}$ gelijk aan

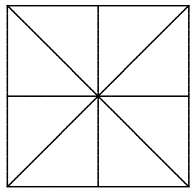
(A) $\frac{4}{3}$	(B) $\frac{6}{5}$	(C) 1	(D) $\frac{3}{250}$	(E) $\frac{3}{25}$

6. De straal van de Aarde bedraagt aan de evenaar ongeveer 6400 kilometer. Onderstel dat een vliegtuig éénmaal rond de Aarde vliegt aan een snelheid van 800 kilometer per uur (t.o.v. de Aarde). Onderstel verder dat de vluchtroute op een verwaarloosbare hoogte

boven de evenaar loopt. Welk van de volgende alternatieven is de beste benadering voor de duur van deze vlucht (in uren)?

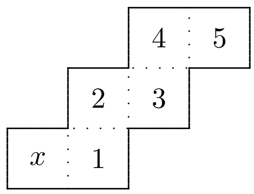
(A) 8	(B) 25	(C) 100	(D) 75	(E) 50

7. Beschouw een figuur (hiernaast) bestaande uit een vierkant, zijn diagonalen en de lijnen door de middens van de overstaande zijden. Het totaal aantal driehoeken (om het even hoe groot) in deze figuur bedraagt



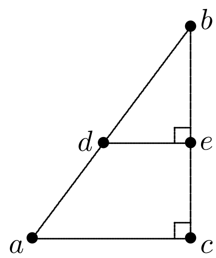
(A) 18	(B) 16	(C) 14	(D) 12	(E) 10

8. De figuur hiernaast kan gevouwen worden tot een kubus. Welk van de genummerde vlakjes zal in de zo gevormde kubus tegenover het zijvlak "x" staan?



(A) 5	(B) 4	(C) 3	(D) 2	(E) 1

9. In driehoek abc is $\angle c = 90°$, $|ac| = 6$ en $|bc| = 8$. De punten d en e liggen op resp. op $[ab]$ en $[bc]$ en $\angle bed = 90°$. Als $|de| = 4$, dan is $|bd|$ gelijk aan



(A) $\frac{20}{3}$	(B) $\frac{16}{3}$	(C) 5	(D) $\frac{15}{2}$	(E) 8

10. De oppervlakte van de driehoek begrensd door de rechten $y = x$, $y = -x$ en $y = 6$ is gelijk aan

(A) $12\sqrt{2}$	(B) 12	(C) 24	(D) 36	(E) $24\sqrt{2}$

11. De optelling hiernaast is fout. Toch kan alles correct gemaakt worden door juist één cijfer d te veranderen – op alle plaatsen waar het voorkomt – in een ander cijfer e. Bepaal de som van d en e.

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 7 & 4 & 2 & 5 & 8 & 6 \\ + & 8 & 2 & 9 & 4 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 6 \end{array}$$

(A) 4	(B) 6	(C) 8	(D) 10	(E) meer dan 10

12. Als $f(x) = ax^4 - bx^2 + x + 5$ en $f(-3) = 2$, dan is $f(3)$ gelijk aan

(A) 8	(B) 3	(C) 1	(D) -2	(E) -5

13. Hoeveel getallen N met 4 cijfers (tientallig) – dus van de vorm $N = (abcd)_{10}$ – voldoen aan elk van de volgende drie voorwaarden?

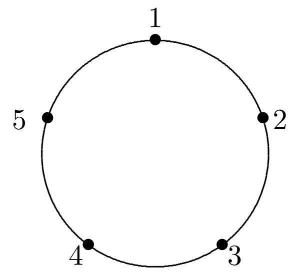
i) $4000 \leq N < 6000$

ii) N is een veelvoud van 5

iii) $3 \leq b < c \leq 6$

(A) 48	(B) 36	(C) 24	(D) 18	(E) 10

14. Vijf punten op een cirkel worden genummerd met 1, 2, 3, 4 en 5 in wijzerzin. Een vlo springt van het ene punt naar het andere in wijzerzin rond de cirkel; als de vlo op een punt met een oneven nummer staat, springt ze één punt vooruit; staat de vlo op een punt met een even nummer, dan springt ze twee punten vooruit. Als de vlo begint op het punt 5, dan zal ze na 1995 sprongen aangekomen zijn op het punt



(A) 5	(B) 4	(C) 3	(D) 2	(E) 1

15. Onderstel f een functie waarvan de grafiek een rechte is en zó dat $f(1) \leq f(2)$, $f(3) \geq f(4)$ en $f(5) = 5$. Welk van de volgende beweringen is waar?

(A) $f(0) < 0$ (B) $f(0) = 0$
(C) $f(1) < f(0) < f(-1)$ (D) $f(0) = 5$
(E) $f(0) > 5$

16. An woont een voetbalmatch bij te Antwerpen en raamt er het aantal toeschouwers op 50000. Bernard woont een voetbalmatch bij te Brussel en raamt het aantal toeschouwers daar op 60000. Een secretaris van de voetbalbond, die het correcte aantal toeschouwers van beide matchen kent, merkt op dat:

i) het werkelijk aantal toeschouwers te Antwerpen minder dan 10% afwijkt van de raming van An.

ii) de raming van Bernard minder dan 10% afwijkt van het werkelijk aantal toeschouwers te Brussel.

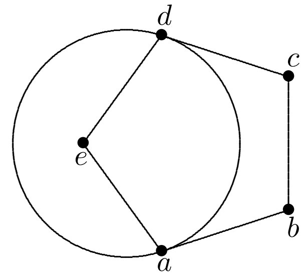
Wat is – afgerond op het dichtstbije duizendtal – het grootst mogelijke verschil tussen de aantallen toeschouwers van beide matchen?

(A) 22000	(B) 21000	(C) 20000	(D) 11000	(E) 10000

17. Twee halve rechten met gemeenschappelijk eindpunt o vormen een hoek van $30°$. Punt a ligt op de ene halve rechte en punt b op de andere, zodat $|ab| = 1$. Wat is de grootst mogelijke lengte $|ob|$?

(A) 1	(B) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	(C) $\sqrt{3}$	(D) 2	(E) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

18. Voor een gegeven regelmatige vijfhoek $abcde$ kan een cirkel getekend worden die raakt aan $[dc]$ in d en aan $[ab]$ in a. De grootte (in graden) van de (kleine) cirkelboog $\overset{\frown}{ad}$ is dan gelijk aan

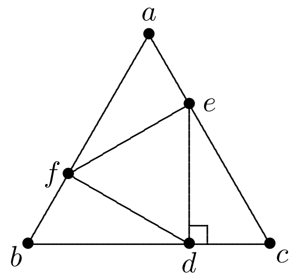


(A) 144	(B) 135	(C) 120	(D) 108	(E) 72

19. Onderstel dat a, b en c drie (niet noodzakelijk verschillende) getallen zijn, lukraak gekozen (met terugplaatsing – dus herhaling mogelijk) uit de verzameling $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. De kans dat $a \cdot b + c$ even is, is gelijk aan

(A) $\dfrac{2}{5}$	(B) $\dfrac{59}{125}$	(C) $\dfrac{1}{2}$	(D) $\dfrac{64}{125}$	(E) $\dfrac{3}{5}$

20. De gelijkzijdige driehoek def is ingeschreven in een gelijkzijdige driehoek abc zó dat $[de] \perp [bc]$. De verhouding van de oppervlakte van driehoek def t.o.v. de oppervlakte van driehoek abc is gelijk aan



(A) $\dfrac{1}{6}$	(B) $\dfrac{1}{4}$	(C) $\dfrac{1}{3}$	(D) $\dfrac{2}{5}$	(E) $\dfrac{1}{2}$

21. We vormen een vijfhoek door een driehoekig stuk uit de hoek van een rechthoekig stuk papier af te knippen. De vijf zijden van deze vijfhoek hebben lengtes 13, 19, 20, 25 en 31 (niet noodzakelijk in de volgorde van deze zijden rond de vijfhoek). De oppervlakte van deze vijfhoek is gelijk aan

(A) 745	(B) 720	(C) 680	(D) 600	(E) 459

22. De zijden van een driehoek hebben lengtes 11, 15 en k, waarbij k een geheel getal is. Voor hoeveel waarden van k is deze driehoek stomphoekig?

(A) 14	(B) 13	(C) 12	(D) 7	(E) 5

23. De punten met coördinaten $(4, 3)$ en $(-4, -3)$ zijn twee niet aanliggende hoekpunten van een rechthoek. De overige twee hoekpunten van deze rechthoek hebben eveneens gehele getallen als coördinaten. Hoeveel zulke rechthoeken bestaan er?

(A) 5	(B) 4	(C) 3	(D) 2	(E) 1

24. Er bestaan strikt positieve natuurlijke getallen a, b en c, met grootste gemene deler gelijk aan 1 en zó dat

$$a \log_{200} 5 + b \log_{200} 2 = c.$$

Waaraan is $a + b + c$ gelijk?

(A) 10	(B) 9	(C) 8	(D) 7	(E) 6

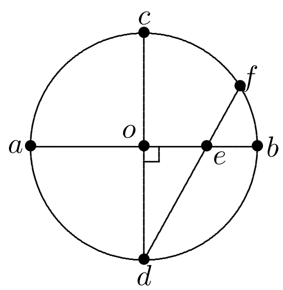
25. Een lijst van 5 strikt positieve gehele getallen heeft gemiddelde 12 terwijl het verschil tussen het grootste en het kleinste van deze getallen gelijk is aan 18. De mediaan van deze lijst is gelijk aan 8. Ook is 8 het getal dat het meest frequent voorkomt in de lijst. Hoeveel verschillende waarden zijn mogelijk voor het tweede grootste getal uit deze lijst?

(A) 12	(B) 10	(C) 8	(D) 6	(E) 4

26. Voor hoeveel verzamelingen (met 3 elementen) $\{a, b, c\} \subset \mathbb{N}_0$ is het waar dat $a \cdot b \cdot c = 2310$?

(A) 45	(B) 43	(C) 40	(D) 36	(E) 32

27. In de figuur (hiernaast) zijn $[ab]$ en $[cd]$ diameters van de cirkel met middelpunt o. Verder geldt dat $[ab] \perp [cd]$ en dat de koorde $[df]$ diameter $[ab]$ snijdt in het punt e. Als $|de| = 6$ en $|ef| = 2$, dan is de oppervlakte van de cirkel gelijk aan



(A) 25π	(B) $\dfrac{49}{2}\pi$	(C) 24π	(D) $\dfrac{47}{2}\pi$	(E) 23π

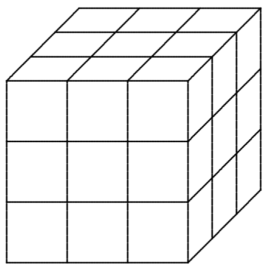
28. Beschouw de driehoekige getallentabel met 0, 1, 2, 3, … langs de buitenzijden en waar de getallen "binnenin" de tabel verkregen worden door de twee aanliggende getallen in de vorige rij op te tellen. We tonen hieronder de rijen 1 tot en met 6.

					0					
				1		1				
			2		2		2			
		3		4		4		3		
	4		7		8		7		4	
5		11		15		15		11		5

Noteer $f(n)$ voor de som van de getallen in rij n. Wat is de rest bij deling van $f(100)$ door 100?

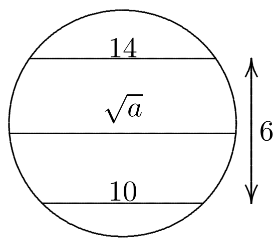
(A) 74	(B) 62	(C) 50	(D) 30	(E) 12

29. Een grote kubus is opgebouwd uit 27 eenheidskubussen. Een vlak staat loodrecht op één van de inwendige diagonalen van de grote kubus en snijdt die diagonaal middendoor. Het aantal eenheidskubussen dat door dit vlak gesneden wordt, is gelijk aan



(A) 20	(B) 19	(C) 18	(D) 17	(E) 16

30. Twee evenwijdige koorden in een cirkel hebben lengtes resp. 10 en 14, en hun onderlinge afstand is 6. De koorde, evenwijdig met de gegeven koorden en precies halfweg tussen hen, heeft lengte $\sqrt{a}$. Dan is a gelijk aan



(A) 184	(B) 176	(C) 168	(D) 156	(E) 144