1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1993-1994 : Tweede Ronde.

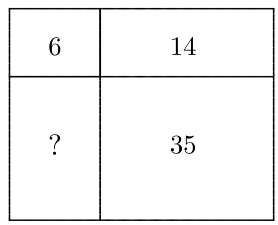
De Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. is een officiële "foreign coordinator" voor de welbekende AHSME-competitie (American High School Mathematics Examination — USA en Canada). De dertig meerkeuzevragen van de tweede ronde van VWO zijn een vertaling van de AHSME vragen. Ook het quoteringssysteem van AHSME wordt overgenomen. Dit werkt als volgt : 0 punten voor een foutief antwoord, 2 punten voor een blanco antwoord en 5 punten voor een correct antwoord. De voorziene tijdsduur is 90 minuten.

1.1 De problemen.[2]

1. $4^4 \cdot 9^4 \cdot 4^9 \cdot 9^9 =$

   (A) 13^{13} (B) 13^{36} (C) 36^{13} (D) 36^{36} (E) 1296^{26}

2. Een grote rechthoek wordt door twee lijnstukken, evenwijdig met zijn zijden, in vier rechthoeken gepartitioneerd. De figuur toont de oppervlaktes van drie van deze rechthoeken. Wat is de oppervlakte van de vierde rechthoek?



   (A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 21 (E) 25

3. Hoeveel van de volgende uitdrukkingen zijn gelijk aan $x^x + x^x$, voor alle $x > 0$?

   I: $2x^x$ **II:** x^{2x} **III:** $(2x)^x$ **IV:** $(2x)^{2x}$

   (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

4. In het xy–vlak is het lijnstuk met eindpunten $(-5, 0)$ en $(25, 0)$ de diameter van een cirkel. Als het punt $(x, 15)$ op die cirkel ligt, dan is x gelijk aan

   (A) 10 (B) 12,5 (C) 15 (D) 17,5 (E) 20

5. Piet wou een getal met 6 vermenigvuldigen, maar deelde het bij vergissing door 6. Daarna wou hij 14 bij het resultaat bijtellen maar hij trok bij vergissing 14 af. Het resultaat dat hij vond, na deze vergissingen, was 16. Indien hij de correcte bewerkingen had uitgevoerd, dan zou het gevonden resultaat

   (A) kleiner zijn dan 400 (B) tussen 400 en 600 liggen
   (C) tussen 600 en 800 liggen (D) tussen 800 en 1000 liggen
   (E) groter zijn dan 1000

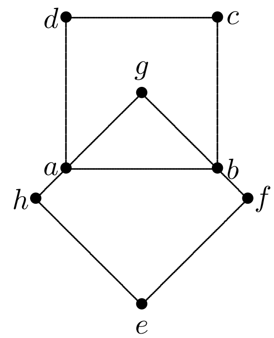
6. In de rij

$$\ldots, a, b, c, d, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

is elke term gelijk aan de som van de twee termen links ervan. Bepaal a.

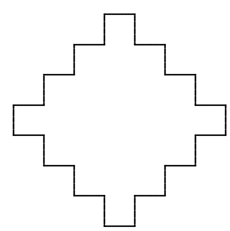
(A) -3	(B) -1	(C) 0	(D) 1	(E) 3

7. De vierkanten $abcd$ en $efgh$ zijn congruent. Ook geldt dat $|ab| = 10$ en dat g het middelpunt is van het vierkant $abcd$. De oppervlakte van het gedeelte van het vlak dat door deze twee vierkanten bedekt is, is gelijk aan



(A) 75	(B) 100	(C) 125	(D) 150	(E) 175

8. In de getoonde veelhoek staat elke zijde loodrecht op haar twee aanpalende zijden. Ook zijn alle 28 zijden van deze veelhoek congruent. De omtrek van de veelhoek is 56. De oppervlakte van deze veelhoek is



(A) 84	(B) 96	(C) 100	(D) 112	(E) 196

9. Als $\angle a$ (hoek a) vier maal $\angle b$ is, en het complement van $\angle b$ vier maal het complement van $\angle a$ is, dan is $\angle b$ gelijk aan

(A) $10°$	(B) $12°$	(C) $15°$	(D) $18°$	(E) $22{,}5°$

10. Als x en y verschillende reële getallen zijn, noteren we $M(x, y)$ voor het grootste van de twee en $m(x, y)$ voor het kleinste van de twee. Als $a < b < c < d < e$, dan is

$$M(M(a, m(b, c)), m(d, m(a, e))) =$$

(A) a	(B) b	(C) c	(D) d	(E) e

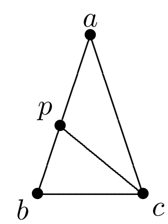
11. Drie massieve kubussen, met volumes resp. 1, 8 en 27, worden langs hun zijvlakken aan elkaar gekleefd en vormen aldus een nieuw lichaam. Bepaal de kleinst mogelijke oppervlakte van dit lichaam.

(A) 36	(B) 56	(C) 70	(D) 72	(E) 74

12. Als $i^2 = -1$, dan is $(i - i^{-1})^{-1}$ gelijk aan

(A) 0	(B) $-2i$	(C) $2i$	(D) $-i/2$	(E) $i/2$

13. In driehoek abc geldt dat $|ab| = |ac|$. Als er een punt p, gelegen strict tussen a en b, bestaat zodat $|ap| = |pc| = |cb|$, dan is $\angle a$ gelijk aan



(A) 30°	(B) 36°	(C) 48°	(D) 60°	(E) 72°

14. Bepaal de som van de rekenkundige rij

$$20 + (20 + \frac{1}{5}) + (20 + \frac{2}{5}) + \cdots + 40.$$

(A) 3000	(B) 3030	(C) 3150	(D) 4100	(E) 6000

15. Voor hoeveel getallen n in $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ is het cijfer van de tientallen van n^2 oneven?

(A) 10	(B) 20	(C) 30	(D) 40	(E) 50

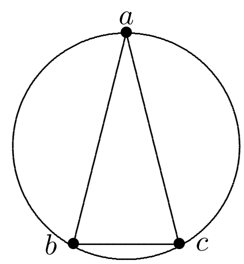
16. In een zak knikkers zijn sommige knikkers rood en de andere blauw. Neemt men één rode knikker uit deze zak weg, dan is één zevende van de overblijvende knikkers rood. Neemt men echter twee blauwe knikkers uit de zak weg (in de plaats van één rode), dan is één vijfde van de overblijvende knikkers rood. Hoeveel knikkers waren er oorspronkelijk in die zak?

(A) 8	(B) 22	(C) 36	(D) 57	(E) 71

17. Een rechthoek met afmetingen $8 \times 2\sqrt{2}$ heeft hetzelfde middelpunt als een cirkel met straal 2. De oppervlakte van het gebied dat gemeenschappelijk is aan de rechthoek en de cirkel is

(A) 2π	(B) $2\pi + 2$	(C) $4\pi - 4$
(D) $2\pi + 4$	(E) $4\pi - 2$	

18. Driehoek abc is ingeschreven in een cirkel en er geldt dat $\angle b = \angle c = 4\angle a$. Als b en c opeenvolgende hoekpunten zijn van een regelmatige n–hoek die eveneens ingeschreven is in deze cirkel, dan is n gelijk aan



(A) 5	(B) 7	(C) 9	(D) 15	(E) 18

19. Merk één schijfje met het nummer "**1**", twee schijfjes met het nummer "**2**", drie schijfjes met het nummer "**3**", ..., vijftig schijfjes met het nummer "**50**". Plaats nu deze $1 + 2 + 3 + \cdots + 50 = 1275$ genummerde schijfjes in een doos. Uit deze doos gaat men nu lukraak schijfjes trekken zonder teruglegging. Wat is het kleinste aantal schijfjes dat men moet trekken om zeker te zijn dat tenminste 10 van die schijfjes het zelfde nummer dragen?

(A) 10	(B) 51	(C) 415	(D) 451	(E) 501

20. Onderstel dat x, y, z een meetkundige rij vormen met reden r en zo dat $x \neq y$. Als nu x, $2y$, $3z$ een rekenkundige rij vormen, dan is r gelijk aan

(A) $\frac{1}{4}$	(B) $\frac{1}{3}$	(C) $\frac{1}{2}$	(D) 2	(E) 4

21. Vind het aantal tegenvoorbeelden voor de bewering

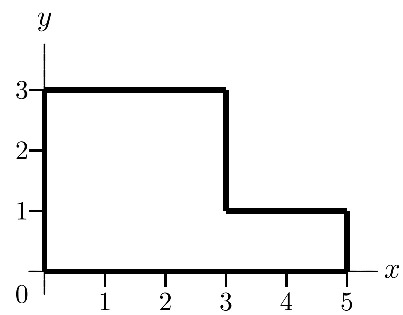
> "Als n een oneven natuurlijk getal is waarvan de som van de cijfers 4 is en waarvan geen enkel cijfer nul is, dan is n priem."

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

22. De negen stoelen van een rij moeten ingenomen worden door zes studenten en de professoren Alpha, Beta en Gamma. De professoren komen aan vóór de studenten en beslissen een stoel te kiezen zodat elke professor tussen twee studenten zal zitten. Op hoeveel mogelijke wijzen kunnen de professoren Alpha, Beta en Gamma hun stoelen kiezen?

(A) 12	(B) 36	(C) 60	(D) 84	(E) 630

23. Beschouw in het xy–vlak een L–vormig gebied begrensd door horizontale en verticale lijnstukken met eindpunten $(0,0)$, $(0,3)$, $(3,3)$, $(3,1)$, $(5,1)$ en $(5,0)$. Bepaal de richtingscoëfficiënt van de rechte die door de oorsprong gaat en die de oppervlakte van dit gebied precies in twee verdeelt.



(A) $\frac{2}{7}$	(B) $\frac{1}{3}$	(C) $\frac{2}{3}$	(D) $\frac{3}{4}$	(E) $\frac{7}{9}$

24. Voor een steekproef van 5 observaties is het rekenkundig gemiddelde 10 en is de mediaan 12. De kleinst mogelijke waarde van het verschil tussen de grootste en de kleinste observatie in deze steekproef is gelijk aan

(A) 2	(B) 3	(C) 5	(D) 7	(E) 10

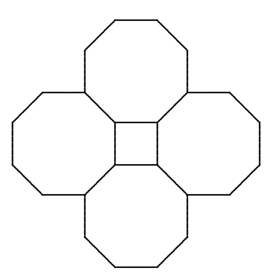
25. Als x en y twee, van nul verschillende, reële getallen zijn, zo dat

$$|x| + y = 3 \quad \text{en} \quad |x|y + x^3 = 0,$$

dan is het geheel getal dat het dichtst bij $x - y$ gelegen is gelijk aan

(A) -3	(B) -1	(C) 2	(D) 3	(E) 5

26. Een regelmatige veelhoek met m zijden is precies ingesloten (zonder overlappingen en zonder openingen) door m regelmatige veelhoeken met n zijden elk. (De figuur toont een situatie waarbij $m = 4$ en $n = 8$.) Als $m = 10$, waaraan is n dan gelijk?



(A) 5	(B) 6	(C) 14	(D) 20	(E) 26

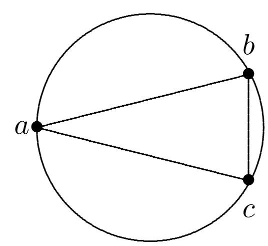
27. Een zak pofmaïs bevat 2/3 witte korrels en 1/3 gele korrels. Slechts 1/2 van de witte graankorrels zullen poffen, terwijl 2/3 van de gele graankorrels zullen poffen. Uit die zak wordt lukraak een graankorrel gekozen; deze korrel poft als hij in de pofmachine geplaatst wordt. Bepaal de kans dat de getrokken graankorrel wit was.

(A) $\frac{1}{2}$	(B) $\frac{5}{9}$	(C) $\frac{4}{7}$	(D) $\frac{3}{5}$	(E) $\frac{2}{3}$

28. Bepaal, in het xy–vlak, het aantal rechten door het punt $(4,3)$ waarvan het x–segment (dit is de x–coördinaat van het snijpunt van de rechte met de x–as) een positief priemgetal is en het y–segment een natuurlijk getal is.

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

29. De punten a, b en c liggen op een cirkel met straal r zodanig dat $|ab| = |ac|$, $|ab| > r$ en zodanig dat de lengte van de korte cirkelboog bc gelijk is aan r. Als de hoeken gemeten worden in radialen, dan is $\dfrac{|ab|}{|bc|} =$



(A) $\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{1}{4}$	(B) $2\cos\frac{1}{2}$	(C) $4\sin\frac{1}{2}$	(D) $\operatorname{cosec}\frac{1}{2}$	(E) $2\sec\frac{1}{2}$

30. Wanneer men n (gewone) dobbelstenen opgooit, is de kans dat de som van de geworpen ogen gelijk is aan 1994, groter dan nul. Deze kans is daarenboven gelijk aan de kans op een som (van de geworpen ogen) gelijk aan S. De kleinst mogelijke waarde van S is gelijk aan

(A) 333	(B) 335	(C) 337
(D) 339	(E) 341	