1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1992-1993 : Tweede Ronde.

De Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. is een officiële "foreign coordinator" voor de welbekende AHSME-competitie (American High School Mathematics Examination — USA en Canada). De dertig meerkeuzevragen van de tweede ronde van VWO zijn een vertaling van de AHSME vragen. Ook het quoteringssysteem van AHSME wordt overgenomen. Dit werkt als volgt : 0 punten voor een foutief antwoord, 2 punten voor een blanco antwoord en 5 punten voor een correct antwoord. De voorziene tijdsduur is 90 minuten.

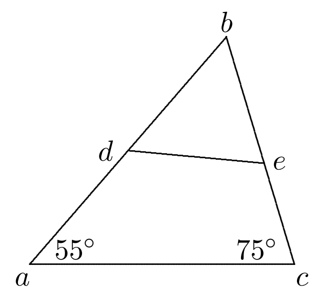
1.1 De problemen.[2]

1. Als a, b en c gehele getallen zijn, noteren we $\boxed{a, b, c}$ voor $a^b - b^c + c^a$.
   Zo is $\boxed{1, -1, 2}$ gelijk aan

(A) -4	(B) -2	(C) 0	(D) 2	(E) 4

2. In Δabc is $\angle a = 55°$ en $\angle c = 75°$. Ook ligt d op de zijde [ab] en e op de zijde $[bc]$. Als je weet dat $|db| = |be|$, dan is de hoek $\angle bed$ gelijk aan

(A) $50°$	(B) $55°$	(C) $60°$	(D) $65°$	(E) $70°$



3. $\dfrac{15^{30}}{45^{15}} =$

(A) $\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$	(B) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$	(C) 1	(D) 3^{15}	(E) 5^{15}

4. We definiëren de bewerking "$\circ$" (voor alle reële getallen x en y) door te stellen $x \circ y = 4x - 3y + xy$. Voor hoeveel reële getallen y geldt dat $3 \circ y = 12$?

(A) 0	(B) 1	(C) 3	(D) 4	(E) meer dan 4

5. Vorig jaar kostte een fiets 16000 BF en een veiligheidshelm 4000 BF. Dit jaar verhoogde de prijs van de fiets met 5% en die van de helm met 10%. Dit komt neer op een prijsverhoging, voor de fiets en de helm samen, van hoeveel procent?

(A) 6%	(B) 7%	(C) 7,5%	(D) 8%	(E) 15%

6. $\sqrt{\dfrac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}} =$

(A) $\sqrt{2}$	(B) 16	(C) 32	(D) $12^{2/3}$	(E) $512,5$

7. We noteren R_k voor een geheel getal waarvan de decimale voorstelling bestaat uit een rij van k enen. Bv. $R_3 = 111$, $R_5 = 11111$, enz... . Als we R_{24} delen door R_4, dan is het quotiënt $Q = \dfrac{R_{24}}{R_4}$ een geheel getal waarvan de decimale voorstelling uit een rij met enkel enen en nullen bestaat. Het aantal nullen in Q is gelijk aan

(A) 10	(B) 11	(C) 12	(D) 13	(E) 15

8. Onderstel dat C_1 en C_2 cirkels zijn met straal 1 die in eenzelfde vlak liggen en elkaar raken. Hoeveel cirkels met straal 3 liggen er dan in dat vlak die raken zowel aan C_1 als aan C_2?

(A) 2	(B) 4	(C) 5	(D) 6	(E) 8

9. Land A telt $c\%$ van de wereldbevolking en bezit $d\%$ van de wereldrijkdom. Land B telt $e\%$ van de wereldbevolking en heeft $f\%$ van de rijkdom. Onderstel dat de inwoners van A de rijkdom van A onder elkaar gelijk verdelen, en evenzo, dat de inwoners van B de rijkdom van B gelijk verdelen. Bepaal nu de verhouding van de rijkdom van een inwoner van A ten opzichte van de rijkdom van een inwoner van B.

(A) $\dfrac{cd}{ef}$	(B) $\dfrac{ce}{df}$	(C) $\dfrac{cf}{de}$	(D) $\dfrac{de}{cf}$	(E) $\dfrac{df}{ce}$

10. Noteer r voor het getal dat ontstaat door zowel het grondtal als de exponent van a^b te verdrievoudigen $(a, b > 0)$. Als r gelijk is aan het product van a^b en x^b (voor $x > 0$), dan is x gelijk aan

(A) 3	(B) $3a^2$	(C) $27a^2$	(D) $2a^{3b}$	(E) $3a^{2b}$

11. Als $\log_2(\log_2(\log_2(x))) = 2$, hoeveel cijfers bevat de decimale voorstelling van het getal x dan?

(A) 5	(B) 7	(C) 9	(D) 11	(E) 13

12. Onderstel dat $f(2x) = \dfrac{2}{2+x}$ (voor alle $x > 0$), dan is $2f(x)$ gelijk aan

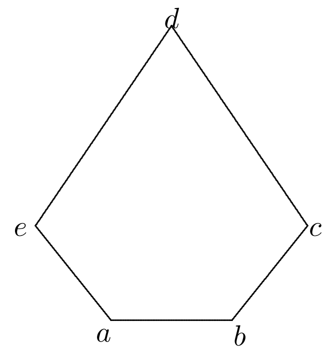
(A) $\dfrac{2}{1+x}$	(B) $\dfrac{2}{2+x}$	(C) $\dfrac{4}{1+x}$	(D) $\dfrac{4}{2+x}$	(E) $\dfrac{8}{4+x}$

13. Een vierkant met omtrek 20 is ingeschreven in een vierkant met omtrek 28. Wat is de grootste afstand tussen een hoekpunt van het binnenste vierkant en een hoekpunt van het buitenste vierkant?

(A) $\sqrt{58}$	(B) $\dfrac{7\sqrt{5}}{2}$	(C) 8	(D) $\sqrt{65}$	(E) $5\sqrt{3}$

14. In een convexe vijfhoek $abcde$ geldt dat $\angle a = \angle b = 120^\circ$ en verder dat $|ea| = |ab| = |bc| = 2$ en $|cd| = |de| = 4$. Bepaal de oppervlakte van $abcde$.

(A) 10	(B) $7\sqrt{3}$
(C) 15	(D) $9\sqrt{3}$
(E) $12\sqrt{5}$	



15. Voor hoeveel waarden van n zal een regelmatige n-hoek binnenhoeken hebben waarvan de grootte in graden door middel van gehele getallen kan uitgedrukt worden?

(A) 16	(B) 18	(C) 20	(D) 22	(E) 24

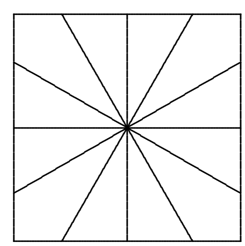
16. Beschouw de niet dalende rij van positieve gehele getallen

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$$

waarin het n-de positieve gehele getal n keer voorkomt. Wanneer de 1993-de term van deze rij gedeeld wordt door 5, dan is de rest gelijk aan

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

17. Jan schilderde een vogelpikbord op de voorkant van een vierkante klok door de "uur-posities" als randen te gebruiken (zie figuur). Als t staat voor de oppervlakte van één van de 8 driehoekige gebieden zoals dat ingesloten tussen "12 uur" en "1 uur", en als q staat voor de oppervlakte van één van de vier vierhoeken zoals die ingesloten tussen "1 uur" en "2 uur", dan is $\frac{q}{t}$ gelijk aan



(A) $2\sqrt{3}-2$	(B) $\frac{3}{2}$	(C) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	(D) $\sqrt{3}$	(E) 2

18. Karel en Bart beginnen op dezelfde dag met hun nieuwe job. Karel's werkschema bestaat uit telkens 3 opeenvolgende werkdagen gevolgd door 1 rustdag. Het werkschema van Bart bestaat uit telkens 7 opeenvolgende werkdagen gevolgd door 3 rustdagen. Hoeveel keer hebben Karel en Bart tijdens hun eerste 1000 dagen op dezelfde dag een rustdag?

(A) 48	(B) 50	(C) 72	(D) 75	(E) 100

19. Hoeveel geordende tweetallen (m, n) van positieve gehele getallen zijn oplossing van $\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$?

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) meer dan 4

20. Beschouw de vergelijking $10z^2 - 3iz - k = 0$, waarin z een complex getal is en waarbij $i^2 = -1$. Geef aan welke van de volgende beweringen waar is.

(A) Voor alle positieve reële getallen k zijn beide wortels zuiver imaginair.
(B) Voor alle negatieve reële getallen k zijn beide wortels zuiver imaginair.
(C) Voor alle zuiver imaginaire getallen k zijn beide wortels reëel en rationaal.
(D) Voor alle zuiver imaginaire getallen k zijn beide wortels reëel en irrationaal.
(E) Voor alle complexe getallen k is geen enkele wortel reëel.

21. Zij $a_1, a_2, \ldots, a_k$ een eindige rekenkundige rij waarvoor geldt dat

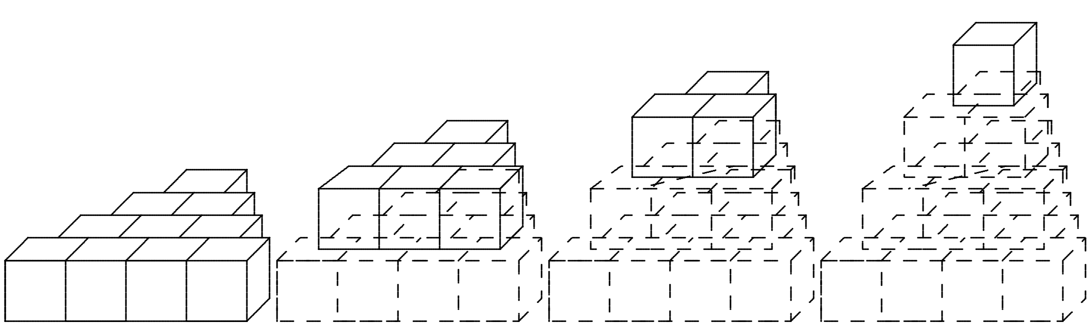
$$a_4 + a_7 + a_{10} = 17 \text{ en}$$

$$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} = 77.$$

Als nu geldt dat $a_k = 13$, dan is k gelijk aan

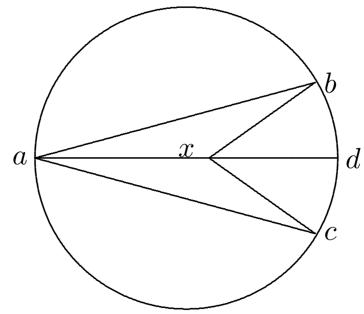
(A) 16	(B) 18	(C) 20	(D) 22	(E) 24

22. Twintig kubussen worden gerangschikt zoals getoond in de figuur. Eerst rangschikt men er 10 volgens een driehoekig patroon; dan komt er een laag met 6 kubussen, eveneens gerangschikt in een driehoekig patroon, gecentreerd op die 10; vervolgens komt een laag met 3 kubussen, opnieuw volgens een driehoekig patroon opgesteld en gecentreerd op de 6 kubussen; uiteindelijk wordt boven op de derde laag 1 kubus, eveneens gecentreerd, geplaatst. De kubussen in de onderste laag worden nu genummerd (in een zekere volgorde) van 1 tot 10. Elke kubus in de lagen 2, 3 en 4 krijgt vervolgens het nummer toegewezen dat de som is van de nummers van de drie kubussen op dewelke die kubus rust. Bepaal nu het kleinst mogelijke getal dat kan toegekend worden aan de top-kubus.



(A) 55	(B) 83	(C) 114	(D) 137	(E) 144

23. Punten a, b, c en d liggen op een cirkel met diameter 1; x is een punt op de diameter $[ad]$. Als $|bx| = |cx|$ en $3\angle bac = \angle bxc = 36^\circ$, dan is $|ax|$ gelijk aan

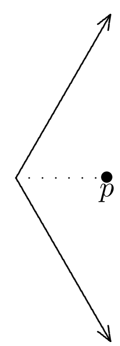


(A) $\cos 6^\circ \cos 12^\circ \sec 18^\circ$
(B) $\cos 6^\circ \sin 12^\circ \operatorname{cosec} 18^\circ$
(C) $\cos 6^\circ \sin 12^\circ \sec 18^\circ$
(D) $\sin 6^\circ \sin 12^\circ \operatorname{cosec} 18^\circ$
(E) $\sin 6^\circ \sin 12^\circ \sec 18^\circ$

24. Een doos bevat 3 glanzende en 4 doffe muntstukken. De muntstukken worden nu lukraak één per één uit de doos getrokken en niet teruggeplaatst. Noteer $\frac{a}{b}$ voor de kans dat je meer dan vier beurten nodig zult hebben om de drie glanzende muntstukken te trekken. Als $\frac{a}{b}$ een onvereenvoudigbare breuk is, wat is dan $a + b$?

(A) 11	(B) 20	(C) 35	(D) 58	(E) 66

25. Noteer S voor de verzameling punten op de halve rechten die een hoek van 120° vormen. Zij p een vast punt dat gelegen is binnen de hoek en op de bissectrice van die hoek. Beschouw nu alle mogelijke gelijkzijdige driehoeken pqr met q en r gelegen in S (de punten q en r mogen op dezelfde halve rechte liggen; bovendien geeft een omwisseling van de namen q en r geen aanleiding tot een nieuwe driehoek). Dan zijn er



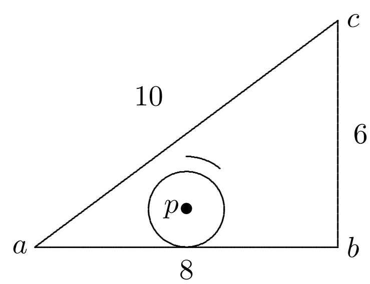
(A) juist 2 zulke driehoeken	(B) juist 3 zulke driehoeken
(C) juist 7 zulke driehoeken	(D) juist 15 zulke driehoeken
(E) meer dan 15 zulke driehoeken	

26. Vind de grootst mogelijke positieve functiewaarde die door de volgende functie bereikt wordt ($x \in \mathbb{R}$):

$$f(x) = \sqrt{8x - x^2} - \sqrt{14x - x^2 - 48}.$$

(A) $\sqrt{7} - 1$	(B) 3	(C) $2\sqrt{3}$	(D) 4	(E) $\sqrt{55} - \sqrt{5}$

27. De zijden van Δabc hebben lengtes 6, 8 en 10. Een cirkel met middelpunt p en straal 1 rolt voortdurend aan de binnenkant rondom de driehoek, zodanig dat hij steeds aan minstens één zijde van de driehoek raakt. Welke afstand heeft het punt p afgelegd op het ogenblik dat p voor het eerst terugkeert op zijn startpositie?



(A) 10	(B) 12	(C) 14	(D) 15	(E) 17

28. Bepaal het aantal driehoeken met een strikt positieve oppervlakte en waarvan de hoekpunten gehele coördinaten (x, y) hebben in het xy-vlak zodanig dat $1 \leq x \leq 4$ en $1 \leq y \leq 4$.

(A) 496	(B) 500	(C) 512	(D) 516	(E) 560

29. Welke van de volgende verzamelingen kan NIET de verzameling lengtes van de uitwendige diagonalen van een balk zijn? (Een *uitwendige diagonaal* is een diagonaal van één van de rechthoekige zijvlakken van de balk.)

(A) $\{4,5,6\}$	(B) $\{4,5,7\}$	(C) $\{4,6,7\}$
(D) $\{5,6,7\}$	(E) $\{5,7,8\}$	

30. Gegeven $0 \leq x_0 < 1$, stel

$$x_n = \begin{cases} 2x_{n-1} & \text{als } 2x_{n-1} < 1 \\ 2x_{n-1} - 1 & \text{als } 2x_{n-1} \geq 1 \end{cases}$$

voor alle gehele getallen $n > 0$. Voor hoeveel waarden van x_0 is het waar dat $x_0 = x_5$?

(A) 0	(B) 1	(C) 5	(D) 31	(E) oneindig veel