

1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1991-1992 : Tweede Ronde.

De Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. is een officiële “foreign coordinator” voor de welbekende AHSME-competitie (American High School Mathematics Examination — USA en Canada). De dertig meerkeuzevragen van de tweede ronde van VWO zijn een vertaling van de AHSME vragen. Ook het quoteringssysteem van AHSME wordt overgenomen. Dit werkt als volgt : 0 punten voor een foutief antwoord, 2 punten voor een blanco antwoord en 5 punten voor een correct antwoord. De voorziene tijdsduur is 90 minuten.

1.1 De problemen.²

1. $6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 =$

- (A) 6^6 (B) 6^7 (C) 36^6 (D) 6^{36} (E) 36^{36}
-

2. Als $3(4x + 5\pi) = P$, dan is $6(8x + 10\pi) =$

- (A) $2P$ (B) $4P$ (C) $6P$ (D) $8P$ (E) $18P$
-

3. Een vaas is gevuld met muntstukken en parels, telkens gemaakt uit zilver of goud. Twintig procent van de voorwerpen in de vaas zijn parels. Veertig procent van de muntstukken in de vaas zijn gemaakt van zilver. Hoeveel procent van de voorwerpen in de vaas zijn dan gouden muntstukken?

- (A) 40% (B) 48% (C) 52% (D) 60% (E) 80%
-

4. Als $m > 0$ en de punten $(m, 3)$ en $(1, m)$ op een rechte met richtingscoëfficiënt m liggen, dan is m gelijk aan

- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2 (E) $\sqrt{5}$
-

²©Committee on the American Mathematics Competition, Mathematical Association of America, 1992

5. Als a , b en c positieve gehele getallen zijn en a en b oneven zijn, dan is $3^a + (b - 1)^2c$
- (A) oneven voor alle waarden van c
 (B) even voor alle waarden van c
 (C) oneven als c even is; even als c oneven is
 (D) oneven als c oneven is; even als c even is
 (E) oneven als c geen drievoud is; even als c een drievoud is
-

6. Als $x > y > 0$, dan is $\frac{x^y y^x}{y^y x^x}$ gelijk aan

- (A) $(x - y)^{y/x}$ (B) $\left(\frac{x}{y}\right)^{x - y}$ (C) 1 (D) $\left(\frac{x}{y}\right)^{y - x}$ (E) $(x - y)^{x/y}$
-

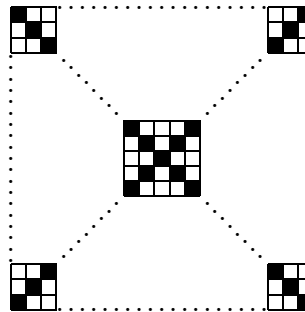
7. De verhouding van w tot x is $4 : 3$, die van y tot z is $3 : 2$ en die van z tot x is $1 : 6$.
 Wat is dan de verhouding van w tot y ?

- (A) $1 : 3$ (B) $16 : 3$ (C) $20 : 3$ (D) $27 : 4$ (E) $12 : 1$
-

8.

Een vierkante vloer is bedekt met congruente vierkante tegels. De tegels op de twee diagonalen van de vloer zijn zwart. Alle andere tegels zijn wit. Als er 101 zwarte tegels zijn, dan is het totaal aantal tegels gelijk aan

- (A) 121 (B) 625 (C) 676
 (D) 2500 (E) 2601



9. Vijf gelijkzijdige driehoeken, elk met zijden van lengte $2\sqrt{3}$, worden aan eenzelfde kant geplaatst van een rechte die van elke driehoek een zijde bevat. Langs deze rechte gezien, is het midden van de zijde van een driehoek een hoekpunt van de volgende driehoek. Bepaal de oppervlakte van het deel van het vlak dat bedekt is door de unie van deze vijf driehoekige gebieden.

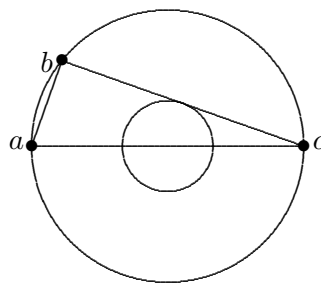


- (A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) $10\sqrt{3}$ (E) $12\sqrt{3}$

-
10. Het aantal positieve gehele getallen k waarvoor de vergelijking $kx - 12 = 3k$ een geheel getal als oplossing voor x heeft, is gelijk aan

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

11. De stralen van twee concentrische cirkels verhouden zich als 1 tot 3. Als $[ac]$ een diameter is van de grootste cirkel en $[bc]$ een koorde is van de grootste cirkel die raakt aan de kleinste cirkel en als $|ab| = 12$, dan is de straal van de grootste cirkel gelijk aan



(A) 13 (B) 18 (C) 21

(D) 24 (E) 26

12. Wanneer men de rechte $x - 3y + 11 = 0$ spiegelt ten opzichte van de X-as, bekomt men $y = mx + b$ als beeld. De waarde van $m + b$ is dan gelijk aan

(A) -6 (B) -5 (C) -4 (D) -3 (E) -2

13. Hoeveel koppels positieve gehele getallen (a, b) met $a + b \leq 100$ voldoen aan de vergelijking

$$\frac{a + b^{-1}}{a^{-1} + b} = 13 ?$$

(A) 1 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 13

14. Welke van de volgende vergelijkingen leveren dezelfde grafische voorstelling op?

I. $y = x - 2$ **II.** $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ **III.** $(x + 2)y = x^2 - 4$

(A) alleen **I** en **II** (B) alleen **I** en **III** (C) alleen **II** en **III**

(D) **I, II** en **III** (E) Geen. Alle vergelijkingen hebben verschillende grafische voorstellingen.

-
15. Stel $i = \sqrt{-1}$. Definieer een rij complexe getallen zodat $z_1 = 0$ en $z_{n+1} = z_n^2 + i$ (voor $n \geq 1$). Hoe ver ligt z_{111} in het complexe vlak van de oorsprong?

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{110}$ (E) $\sqrt{2^{55}}$

16. Als voor drie verschillende positieve getallen x , y en z geldt dat

$$\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y}$$

dan is $\frac{x}{y}$ gelijk aan

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$ (E) 2

17. Schrijf alle gehele getallen van 19 tot 92 achtereen en vorm zo een groot geheel getal

$$N = 19202122 \dots 909192.$$

Als 3^k de grootste macht van 3 is die N deelt, dan geldt dat $k =$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) meer dan 3

18. Voor de stijgende rij van strikt positieve gehele getallen a_1, a_2, a_3, \dots geldt de eigenschap dat $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ (voor alle $n \geq 1$). Als $a_7 = 120$, dan is a_8 gelijk aan

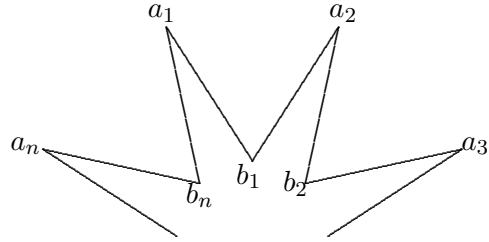
(A) 128 (B) 168 (C) 193 (D) 194 (E) 210

19. Beschouw voor elk hoekpunt van een massieve kubus het viervlak (tetraëder) bepaald door dat hoekpunt en de middens van de drie ribben van de kubus die door dat hoekpunt gaan. Het stuk van de kubus dat overblijft wanneer men de 8 zo gevormde viervlakken wegsnijdt, noemen we een kuboctaëder. Welk van de volgende waarden benadert het best de verhouding van het volume van de kuboctaëder tot het volume van de oorspronkelijke kubus?

(A) 75% (B) 78% (C) 81% (D) 84% (E) 87%

20.

De figuur toont een gedeelte van een “ n -puntige regelmatige ster”. Dit is een gesloten veelhoek waarin de $2n$ ribben congruent zijn en verder ook de hoeken a_1, a_2, \dots, a_n en de hoeken b_1, b_2, \dots, b_n congruent zijn. Als de scherpe hoek in a_1 10° kleiner is dan de scherpe hoek in b_1 , dan is n gelijk aan



- (A) 12 (B) 18 (C) 24 (D) 36 (E) 60
-

21. Voor een eindige rij getallen $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ definieert men de *Cesàro-som* van A als

$$\frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n},$$

waarin $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ ($1 \leq k \leq n$). Stel dat de Cesàro-som van de rij (met 99 termen) $(a_1, a_2, \dots, a_{99})$ gelijk is aan 1000, wat is dan de Cesàro-som van de rij (met 100 termen) $(1, a_1, a_2, \dots, a_{99})$?

- (A) 991 (B) 999 (C) 1000 (D) 1001 (E) 1009
-

22. Kies 10 punten op de positieve X -as, X^+ , en 5 punten op de positieve Y -as, Y^+ . Teken nu de 50 lijnstukken die men bekomt door telkens één van die 10 punten (op X^+) te verbinden met één van die 5 punten (op Y^+). Bepaal nu het grootste aantal snijpunten van deze 50 lijnstukken die in het inwendige van het eerste kwadrant kunnen liggen.

- (A) 250 (B) 450 (C) 500 (D) 1250 (E) 2500
-

23. Zij S de grootste deelverzameling van $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$ zodat geen enkel tweetal verschillende elementen van S een som heeft die deelbaar is door 7. Bepaal het aantal elementen van S .

- (A) 6 (B) 7 (C) 14 (D) 22 (E) 23

-
24. Onderstel dat $abcd$ een parallellogram is met oppervlakte 10, $|ab| = 3$ en $|bc| = 5$. Plaats nu e , f en g resp. op de zijden $[ab]$, $[bc]$ en $[ad]$, zó dat $|ae| = |bf| = |ag| = 2$. Onderstel dat de rechte door g en evenwijdig met $[ef]$ het lijnstuk $[cd]$ snijdt in h . Dan is de oppervlakte van de vierhoek $efhg$ gelijk aan

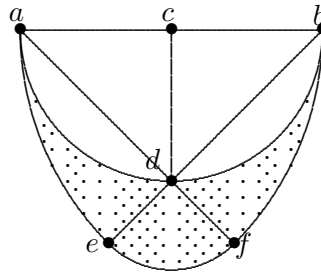
- (A) 4 (B) 4,5 (C) 5 (D) 5,5 (E) 6
-

25. In driehoek abc is $\angle abc = 120^\circ$, $|ab| = 3$ en $|bc| = 4$. Onderstel dat de loodlijnen op $[ab]$ in a en op $[bc]$ in c elkaar snijden in het punt d . Dan is $|cd|$ gelijk aan

- (A) 3 (B) $\frac{8}{\sqrt{3}}$ (C) 5 (D) $\frac{11}{2}$ (E) $\frac{10}{\sqrt{3}}$
-

26.

De halve cirkel \widehat{ab} heeft middelpunt c en straal 1. Het punt d ligt op \widehat{ab} en $[cd] \perp [ab]$. Verleng $[bd]$ en $[ad]$ resp. tot aan de punten e en f , en wel zó dat de bogen \widehat{ae} en \widehat{bf} cirkelbogen zijn met resp. b en a als middelpunt. De cirkelboog \widehat{ef} tenslotte, heeft middelpunt d . Bepaal de oppervlakte van de gestippelde “glimlach”, $ae f b d a$.



- (A) $(2 - \sqrt{2})\pi$ (B) $2\pi - \pi\sqrt{2} - 1$ (C) $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})\pi$
 (D) $\frac{5\pi}{2} - \pi\sqrt{2} - 1$ (E) $(3 - 2\sqrt{2})\pi$
-

27. In een cirkel met straal r zijn koorden $[ab]$ met lengte 10 en $[cd]$ met lengte 7 getrokken. Wanneer men deze koorden $[ab]$ en $[cd]$ verlengt resp. doorheen de punten b en c , dan snijden ze elkaar in het punt p dat buiten de cirkel ligt. Als $\angle apd = 60^\circ$ en $|bp| = 8$, dan is r^2 gelijk aan

- (A) 70 (B) 71 (C) 72 (D) 73 (E) 74

28. Zij $i = \sqrt{-1}$. Het produkt van de reële delen van de wortels van de vergelijking $z^2 - z = 5 - 5i$ is gelijk aan

(A) -25 (B) -6 (C) -5 (D) $\frac{1}{4}$ (E) 25

29. Bij een “vervalst” muntstuk is de kans om kop te gooien $\frac{2}{3}$. Als we dit muntstuk 50 keer opgooien, wat is dan de kans dat het totaal aantal keren dat kop gegooid werd even is?

(A) $25 \left(\frac{2}{3}\right)^{50}$ (B) $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{50}}\right)$ (C) $\frac{1}{2}$
(D) $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3^{50}}\right)$ (E) $\frac{2}{3}$

30. Zij $abcd$ een gelijkbenig trapezium met basissen $|ab| = 92$ en $|cd| = 19$. Onderstel dat $|ad| = |bc| = x$ en dat een cirkel waarvan het middelpunt op $[ab]$ ligt, raakt aan de ribben $[ad]$ en $[bc]$. Als m de kleinst mogelijke waarde voor x is, dan is m^2 gelijk aan

(A) 1369 (B) 1679 (C) 1748 (D) 2109 (E) 8825
