1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1990-1991: Tweede Ronde.

Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. is een officiële "foreign coordinator" voor de welbekende AHSME-competitie (American High School Mathematics Examination - USA en Canada). De 30 meerkeuzevragen van de tweede ronde van VWO zijn een vertaling van de AHSME vragen. Ook het quoteringssysteem van AHSME wordt overgenomen. Dit werkt als volgt: 0 punten voor een foutief antwoord, 2 punten voor een blanco antwoord en 5 punten voor een correct antwoord. De voorziene antwoordduur is 90 minuten.

1.1 De problemen.

1. Als we voor elk drietal verschillende getallen a, b en c $\boxed{a, b, c}$ definiëren als

$$\boxed{a, b, c} = \frac{c+a}{c-b}$$

dan is $\boxed{1, -2, -3}$ gelijk aan

$$(A)\quad -2 \qquad (B)\quad -\frac{2}{5} \qquad (C)\quad -\frac{1}{4} \qquad (D)\quad \frac{2}{5} \qquad (E)\quad 2$$

---

2. $|3-\pi| =$

$$(A)\quad \frac{1}{7} \qquad (B)\quad 0{,}14 \qquad (C)\quad 3-\pi \qquad (D)\quad 3+\pi \qquad (E)\quad \pi-3$$

3.

$$(4^{-1} - 3^{-1})^{-1} =$$

$$(A)\quad -12 \qquad (B)\quad -1 \qquad (C)\quad \frac{1}{12} \qquad (D)\quad 1 \qquad (E)\quad 12$$

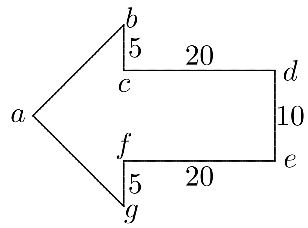
---

4. Welke van de volgende driehoeken kan niet bestaan?

(A) Een scherphoekige gelijkbenige driehoek
(B) Een rechthoekige gelijkbenige driehoek
(C) Een stomphoekige rechthoekige driehoek
(D) Een ongelijkzijdige rechthoekige driehoek
(E) Een stomphoekige ongelijkzijdige driehoek

---

5. De figuur toont een veelhoek in de vorm van een pijl. In deze veelhoek zijn de hoeken in de hoekpunten a, c, d, e en f rechte hoeken; verder is $|bc| = |fg| = 5$, $|cd| = |fe| = 20$, $|de| = 10$ en $|ab| = |ag|$. De oppervlakte van deze veelhoek wordt het best benaderd door



(A) 288 (B) 291 (C) 294
(D) 297 (E) 300

---

6. Als $x \geq 0$, dan is $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} =$

(A) $x\sqrt{x}$ (B) $x\sqrt[4]{x}$ (C) $\sqrt[8]{x}$ (D) $\sqrt[8]{x^3}$ (E) $\sqrt[8]{x^7}$

---

7. Als $x = \frac{a}{b}$, $a \neq b$ en $b \neq 0$, dan is $\frac{a+b}{a-b} =$

(A) $\frac{x}{x+1}$ (B) $\frac{x+1}{x-1}$ (C) 1 (D) $x - \frac{1}{x}$ (E) $x + \frac{1}{x}$

---

8. Vloeistof X mengt zich niet met water. Tenzij gehinderd, spreidt zij zich op het wateroppervlak uit en vormt ze een schijfvormige (cirkelvormige) film van 0,1 cm dikte. Een rechthoekige doos met afmetingen 6 cm, 3 cm en 12 cm wordt gevuld met vloeistof X. Daarna laat men de inhoud van deze doos op een groot wateroppervlak uitstromen. Wat zal de straal zijn, uitgedrukt in cm, van de schijfvormige film die zich zal vormen?

(A) $\frac{\sqrt{216}}{\pi}$ (B) $\sqrt{\frac{216}{\pi}}$ (C) $\sqrt{\frac{2160}{\pi}}$ (D) $\frac{216}{\pi}$ (E) $\frac{2160}{\pi}$

---

9. Van tijd $t = 0$ tot tijd $t = 1$ groeide een bevolking aan met $i\%$, en van tijd $t = 1$ tot tijd $t = 2$ groeide die bevolking aan met $j\%$. Met hoeveel % groeide die bevolking dan aan van tijd $t = 0$ tot tijd $t = 2$?

(A) $(i + j)\%$ (B) $ij\%$ (C) $(i + ij)\%$
(D) $(i + j + \frac{ij}{100})\%$ (E) $(i + j + \frac{i+j}{100})\%$

---

10. Het punt p ligt op afstand 9 van het middelpunt van een cirkel met straal 15. Hoeveel verschillende koorden van deze cirkel bevatten p en hebben een geheel getal als lengte?

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 29

11. Jan en Els lopen 10 kilometer. Ze starten op een zelfde punt, lopen eerst 5 kilometer naar de top van een heuvel en keren dan langs dezelfde weg naar hun startpunt terug. Jan start met een voorsprong van 10 minuten en loopt met een snelheid van 15 km/uur bergopwaarts en met een snelheid van 20 km/uur bergafwaarts. Els loopt met een snelheid van 16 km/uur bergopwaarts en met een snelheid van 22 km/uur bergafwaarts. Hoever zijn zij van de top van de heuvel wanneer zij elkaar al lopende in tegengestelde richtingen ontmoeten?

(A) $\frac{5}{4}$ km (B) $\frac{35}{27}$ km (C) $\frac{27}{20}$ km (D) $\frac{7}{3}$ km (E) $\frac{28}{9}$ km

12. De maatgetallen (in graden) van de binnenhoeken van een convexe zeshoek vormen een rekenkundige rij van positieve gehele getallen. Stel dat de grootste van die hoeken $m°$ meet. Wat is dan de grootst mogelijke waarde van m?

(A) 165 (B) 167 (C) 170 (D) 175 (E) 179

13. In een wedren tussen de drie paarden X, Y en Z zijn ex-aequo's niet mogelijk. In de weddenschappen staat de kans dat X niet wint 3-tegen-1 genoteerd en de kans dat Y niet wint staat 2-tegen-3 genoteerd. Hoe staat de kans dat Z niet wint dan genoteerd? ("de kans dat H niet wint staat p-tegen-q genoteerd", betekent dat de kans dat H wint gelijk is aan $\frac{q}{p+q}$.)

(A) 3-tegen-20 (B) 5-tegen-6 (C) 8-tegen-5
(D) 17-tegen-3 (E) 20-tegen-3

14. Als x de derdemacht is van een strikt positief geheel getal en d is het aantal strikt positieve gehele getallen die deler zijn van x, dan kan d gelijk zijn aan

(A) 200 (B) 201 (C) 202 (D) 203 (E) 204

15. Rond een cirkelvormige tafel staan precies 60 stoelen. Aan deze tafel zijn N personen aangezeten op zo'n wijze dat de volgende persoon die gaat zitten, zeker naast iemand moet aanzitten. Geef de kleinst mogelijke waarde van N.

(A) 15 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 58

16. Vorig jaar namen 100 leerlingen van het Eeuwfeestinstituut deel aan de Vlaamse Wiskunde Olympiade. Hun gemiddelde score was 100. Het aantal niet-zesdejaars dat deelnam was 50% groter dan het aantal zesdejaars en de gemiddelde score van de zesdejaars was 50% hoger dan die van de niet-zesdejaars. Wat was de gemiddelde score van de zesdejaars.

(A) 100 (B) 112,5 (C) 120 (D) 125 (E) 150

---

17. Een strikt positief geheel getal N noemt men een *palindroom* als het gelijk is aan het getal dat men bekomt door de volgorde van zijn cijfers om te keren. Is het bovendien een priemgetal, dan noemt men het een *priempalindroom*. Het jaartal 1991 is het enige in deze eeuw dat de volgende twee eigenschappen heeft:

(a) het is een palindroom.

(b) het ontbindt zich als produkt van een priempalindroom met twee cijfers en een priempalindroom met drie cijfers.

Hoeveel jaartallen in het millenium van het jaar 1000 tot het jaar 2000 (met inbegrip van 1991) hebben deze twee eigenschappen?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

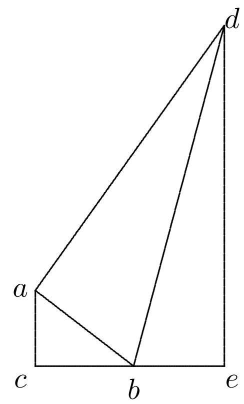
---

18. Als S staat voor de verzameling van de punten z in het complexe vlak waarvoor $(3+4i)z$ een reëel getal is, dan is S

(A) een rechthoekige driehoek (B) een cirkel (C) een hyperbool
(D) een rechte (E) een parabool

19.

Driehoek abc heeft een rechte hoek in c. $|ac| = 3$ en $|bc| = 4$. Driehoek abd heeft een rechte hoek in a en verder is $|ad| = 12$. De punten c en d liggen aan verschillende kanten van de rechte ab. De rechte door d en evenwijdig met de rechte ac snijdt de rechte cb in het punt e. Als $\dfrac{|de|}{|db|} = \dfrac{m}{n}$, waar m en n onderling ondeelbare strikt positieve gehele getallen zijn, dan is $m + n =$



(A) 25 (B) 128 (C) 153 (D) 243 (E) 256

---

20. De som van alle reële getallen x waarvoor $(2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (4^x + 2^x - 6)^3$ is gelijk aan

(A) 3/2 (B) 2 (C) 5/2 (D) 3 (E) 7/2

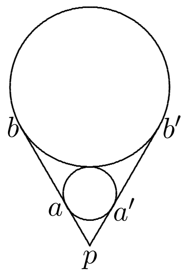
---

21. Als $f(\frac{x}{x-1}) = \frac{1}{x}$ voor alle $x \neq 0, 1$ en als $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, dan is $f(\sec^2\theta)$ gelijk aan

(A) $\sin^2\theta$ (B) $\cos^2\theta$ (C) $\mathrm{tg}^2\theta$ (D) $\mathrm{cotg}^2\theta$ (E) $\mathrm{cosec}^2\theta$

---

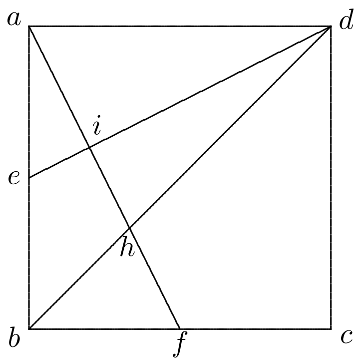
22. Twee cirkels raken elkaar uitwendig. De rechten pab en $pa'b'$ zijn gemeenschappelijke raaklijnen van beide cirkels, waarbij a en a' op de kleinere cirkel en b en b' op de grotere cirkel liggen. Bepaal de oppervlakte van de kleinere cirkel als je weet dat $|pa| = |ab| = 4$.



(A) $1{,}44\pi$ (B) 2π (C) $2{,}56\pi$
(D) $\sqrt{8}\pi$ (E) 4π

---

23. Als $abcd$ een (2×2) vierkant is, e het midden van $[ab]$, f het midden van $[bc]$, $[af]$ en $[de]$ elkaar snijden in i en $[bd]$ en $[af]$ elkaar snijden in h, dan is de oppervlakte van de vierhoek $beih$ gelijk aan



(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{7}{15}$

(D) $\frac{8}{15}$ (E) $\frac{3}{5}$

---

24. De grafiek, G, van $y = \log_{10} x$ wordt over een hoek van $90°$ in tegenwijzerzin geroteerd rond de oorsprong. Zo bekomt men een nieuwe grafiek G'. Welke van de volgende vergelijkingen is een vergelijking voor G'?

(A) $y = \log_{10}(\frac{x+90}{9})$ (B) $y = \log_x 10$ (C) $y = \frac{1}{x+1}$
(D) $y = 10^{-x}$ (E) $y = 10^x$

---

25. Zij $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ en

$$P_n = \frac{T_2}{T_2 - 1} \cdot \frac{T_3}{T_3 - 1} \cdot \frac{T_4}{T_4 - 1} \cdot \cdots \cdot \frac{T_n}{T_n - 1} \text{ voor } n = 2, 3, 4, \ldots .$$

Welke van de volgende waarden benadert dan het best P_{1991}?

(A) 2,0 (B) 2,3 (C) 2,6 (D) 2,9 (E) 3,2

---

26. Een strikt positief geheel getal met n cijfers noemt men "snoezig" als zijn cijfers een herschikking van de verzameling $\{1, 2, \ldots, n\}$ zijn en als zijn eerste k cijfers telkens een getal vormen dat deelbaar is door k (voor $k = 1, 2, \ldots, n$).

Zo is 321 bijvoorbeeld een snoezig getal van 3 cijfers, want 1 deelt 3, 2 deelt 32 en 3 deelt 321. Hoeveel snoezige getallen van 6 cijfers zijn er?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

---

27. Als $x + \sqrt{x^2 - 1} + \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 20$ dan is $x^2 + \sqrt{x^4 - 1} + \dfrac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 - 1}}$

(A) 5,05 (B) 20 (C) 51,005 (D) 61,25 (E) 400

---

28. In een urne zitten om te beginnen 100 zwarte en 100 witte knikkers. Men neemt nu telkens 3 knikkers uit die urne weg en vervangt ze met knikkers uit een afzonderlijke voorraad, volgens het volgende patroon:

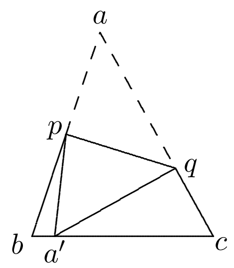
WEGGENOMEN KNIKKERS	-	**WORDEN VERVANGEN DOOR**
3 zwarte	-	1 zwarte
2 zwarte, 1 witte	-	1 zwarte, 1 witte
1 zwarte, 2 witte	-	2 witte
3 witte	-	1 zwarte, 1 witte

Welke van de onderstaande knikker-verzamelingen kan op het einde, wanneer men de procedure hierboven verschillende keren heeft toegepast, de inhoud uitmaken van de urne?

(A) 2 zwarte knikkers (B) 2 witte knikkers (C) 1 zwarte knikker
(D) 1 zwarte knikker en 1 witte knikker (E) 1 witte knikker

---

29. Een gelijkzijdige driehoek abc werd geplooid zó dat hoekpunt a op het punt a' van lijnstuk $[bc]$ terechtgekomen is. Als $|ba'| = 1$ en $|a'c| = 2$, dan is de lengte van de vouwlijn $[pq]$ gelijk aan



(A) $\dfrac{8}{5}$ (B) $\dfrac{7}{20}\sqrt{21}$ (C) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(D) $\dfrac{13}{8}$ (E) $\sqrt{3}$

---

30. Voor een verzameling V noteren we $|V|$ voor het aantal elementen van V en $n(V)$ voor het aantal deelverzamelingen van V (de lege verzameling en V zelf inbegrepen). Stel nu dat A, B en C verzamelingen zijn waarvoor

$$n(A) + n(B) + n(C) = n(A \cup B \cup C) \qquad \text{en} \qquad |A| = |B| = |100|,$$

wat is dan de kleinst mogelijke waarde van $|A \cap B \cap C|$?

(A) 96 (B) 97 (C) 98 (D) 99 (E) 100
