1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1989-1990: Tweede Ronde.

Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. is een officiële “foreign coordinator” voor de welbekende AHSME-competitie (American High School Mathematics Examination - USA en Canada). De 30 meerkeuzevragen van de tweede ronde van VWO zijn een vertaling van de AHSME vragen. Ook het quoteringssysteem van AHSME wordt overgenomen. Dit werkt als volgt: 0 punten voor een foutief antwoord, 2 punten voor een blanco antwoord en 5 punten voor een correct antwoord. De voorziene antwoordduur is 90 minuten.

1.1 De problemen[1].

1. Als $\dfrac{x/4}{2} = \dfrac{4}{x/2}$ dan is x gelijk aan

   (A) $\pm 1/2$ (B) ± 1 (C) ± 2 (D) ± 4 (E) ± 8

---

2. $$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} =$$

   (A) -16 (B) $-\sqrt{2}$ (C) $-\dfrac{1}{16}$ (D) $\dfrac{1}{256}$ (E) $\sqrt{2}$

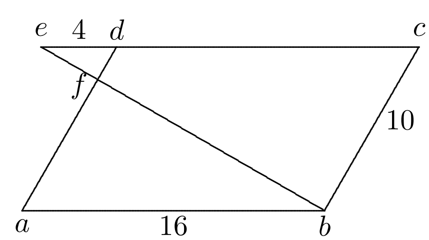
---

3. Van een gegeven trapezium is de rij van de opeenvolgende hoeken een rekenkundige rij. De kleinste hoek in dit trapezium is $75°$. Wat is dan de grootste hoek in dit trapezium?

   (A) $95°$ (B) $100°$ (C) $105°$ (D) $110°$ (E) $115°$

---

4. $abcd$ is een parallellogram waarin $\angle abc = 120°$, $|ab| = 16$ en $|bc| = 10$. Verleng nu de zijde cd langs de kant van d tot een punt e zodat $|de| = 4$ (zie figuur). Als f het snijpunt is van be met ad, dan benadert $|fd|$ het best

   (A) 1 (B) 2 (C) 3
   (D) 4 (E) 5

---

[1] ©Committee on The American Mathematics Competitions. Mathematical Association of America, 1990

5. Welk van de volgende getallen is het grootst?

$$(A)\quad \sqrt{\sqrt[3]{5.6}} \qquad (B)\quad \sqrt{6\sqrt[3]{5}} \qquad (C)\quad \sqrt{5\sqrt[3]{6}} \qquad (D)\quad \sqrt[3]{5\sqrt{6}} \qquad (E)\quad \sqrt[3]{6\sqrt{5}}$$

---

6. De punten a en b liggen 5 eenheden van elkaar verwijderd. Hoeveel rechten liggen er dan in een gegeven vlak dat a en b bevat, 2 eenheden van a en 3 eenheden van b verwijderd?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) meer dan 3

---

7. Van een gegeven driehoek zijn de lengtes van de zijden gehele getallen en bedraagt de omtrek 8. Wat is de oppervlakte van deze driehoek?

$$(A)\quad 2\sqrt{2} \qquad (B)\quad \frac{16}{9}\sqrt{3} \qquad (C)\quad 2\sqrt{3} \qquad (D)\quad 4 \qquad (E)\quad 4\sqrt{2}$$

---

8. Het aantal reële oplossingen van de vergelijking $|x-2|+|x-3|=1$ is gelijk aan

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) meer dan 3

---

9. Bij een gegeven kubus kleurt men elke ribbe rood of zwart. Elk zijvlak van die kubus bevat evenwel minstens één zwarte ribbe. Het kleinst mogelijke aantal zwarte ribben is dan

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

---

10. Een houten kubus van afmetingen $11 \times 11 \times 11$ wordt gevormd door het samenkleven van 11^3 eenheidskubussen. Geef het grootst mogelijke aantal eenheidskubussen dat men vanaf één punt in de ruimte kan zien.

(A) 328 (B) 329 (C) 330 (D) 331 (E) 332

---

11. Hoeveel strikt positieve gehele getallen kleiner dan 50 hebben een oneven aantal positieve gehele getallen als deler?

(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 11

---

12. Zij f de funktie gedefinieerd door $f(x) = ax^2 - \sqrt{2}$ voor een strikt positieve a. Wanneer je weet dat $f(f(\sqrt{2})) = -\sqrt{2}$ dan is a gelijk aan

(A) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $2-\sqrt{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (E) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

---

13. Men laat de volgende instrukties door een computer uitvoeren. Welke waarde van X zal er, ten gevolge van instruktie 5, afgedrukt worden?

```
1. Begin met X aan 3 en met S aan 0.
2. Vergroot de waarde van X met 2.
3. Vergroot de waarde van S met de waarde van X.
4. Als S tenminste 10000 is, ga dan naar instruktie 5;
   in het andere geval, ga naar instruktie 2 en doe daar verder.
5. Druk de waarde van X af.
6. Stop.
```

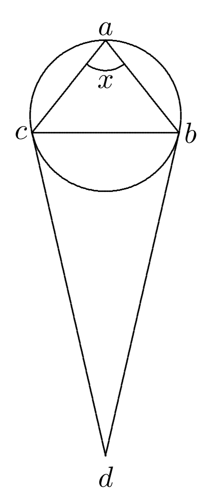
(A) 19 (B) 21 (C) 23 (D) 199 (E) 201

---

14. Een scherphoekige gelijkbenige driehoek abc wordt ingeschreven in een cirkel. Door b en c tekent men raaklijnen aan de cirkel. Deze snijden elkaar in het punt d. Als $\angle abc = \angle acb = 2\angle d$ en als x de grootte van $\angle a$ is in radialen, dan is x gelijk aan

(A) $\dfrac{3}{7}\pi$ (B) $\dfrac{4}{9}\pi$ (C) $\dfrac{5}{11}\pi$

(D) $\dfrac{6}{13}\pi$ (E) $\dfrac{7}{15}\pi$



---

15. Men beschikt over 4 natuurlijke getallen. Telt men telkens 3 van deze getallen bij elkaar op, dan bekomt men de sommen 180, 197, 208 en 222. Geef het grootste van deze vier natuurlijke getallen.

(A) 77 (B) 83 (C) 89 (D) 95
(E) dit kan niet uit deze gegevens afgeleid worden

---

16. Bij een van George Washington's feestjes, schudde elke man iedereen de hand, uitgezonderd zijn eigen echtgenote. Er waren geen handdrukken onder vrouwen onderling. 13 gehuwde koppels woonden dit feestje bij. Hoeveel handdrukken vonden er plaats tussen deze 26 mensen?

(A) 78 (B) 185 (C) 234 (D) 312 (E) 325

---

17. Hoeveel van de getallen 100, 101, ... ,999, hebben drie verschillende cijfers in stijgende orde of in dalende orde?

(A) 120 (B) 168 (C) 204 (D) 216 (E) 240

---

18. Kies eerst a lukraak uit de verzameling $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$, en kies daarna b lukraak uit dezelfde verzameling. De kans dat het getal $3^a + 7^b$ het cijfer 8 als cijfer van de eenheden heeft, is gelijk aan

(A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{3}{16}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{4}$

---

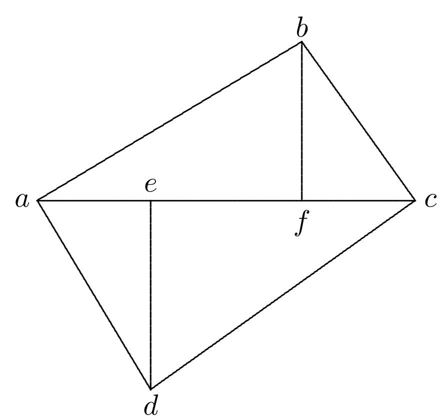
19. Voor hoeveel natuurlijke getallen n tussen 1 en 1990 is de onechte breuk $\dfrac{n^2+7}{n+4}$ vereenvoudigbaar.

(A) 0 (B) 86 (C) 90 (D) 104 (E) 105

---

20. In de figuur is $abcd$ een vierhoek met rechte hoeken in a en c. De punten e en f op $[ac]$ liggen zó dat $[de]$ en $[bf]$ loodrecht staan op $[ac]$. Als $|ae| = 3$, $|de| = 5$ en $|ce| = 7$ dan is $|bf| =$

(A) 3,6 (B) 4 (C) 4,2
(D) 4,5 (E) 5



21. Beschouw een piramide p-$abcd$ waarvan de basis $abcd$ een vierkant is en de top p evenver verwijderd ligt van a, b, c en d. Als gegeven is dat $|ab| = 1$ en $\angle apb = 2\theta$ dan wordt het volume van deze piramide gegeven door

(A) $\dfrac{\sin\theta}{6}$ (B) $\dfrac{\text{cotg } \theta}{6}$ (C) $\dfrac{1}{6\sin\theta}$ (D) $\dfrac{1-\sin 2\theta}{6}$ (E) $\dfrac{\sqrt{\cos 2\theta}}{6\sin\theta}$

---

22. Wanneer de 6 oplossingen van de vergelijking $x^6 = -64$ geschreven worden in de vorm $a+bi$ (waarin a en b reëel zijn), dan wordt het product van die oplossingen waarin $a > 0$ gegeven door

(A) -2 (B) 0 (C) $2i$ (D) 4 (E) 16

---

23. Als $x, y > 0$, $\log_y x + \log_x y = \dfrac{10}{3}$ en $xy = 144$, dan is $\dfrac{x+y}{2} =$

(A) $12\sqrt{2}$ (B) $13\sqrt{3}$ (C) 24 (D) 30 (E) 36

---

24. Alle studenten van het Adams-instituut en van het Baker-instituut nemen deel aan eenzelfde examen. In de tabel hieronder worden de gemiddelde resultaten weergegeven voor de jongens, voor de meisjes en voor de jongens en meisjes gezamenlijk en dit zowel voor het Adams-instituut als voor het Baker-instituut. Ook vinden we er het gemiddelde resultaat voor de jongens van beide instituten gezamenlijk. Wat is het gemiddelde resultaat voor de meisjes over de twee instituten te zamen?

	Adams	Baker	Adams & Baker
Jongens	71	81	79
Meisjes	76	90	?
Jongens en Meisjes	74	84	

(A) 81 (B) 82 (C) 83 (D) 84 (E) 85

---

25. Negen congruente sferen (bollen) zitten opeengepakt in een kubus met zijde van lengte 1. Deze bollen zijn zo gestapeld dat één ervan zijn middelpunt heeft in het middelpunt van de kubus en dat de andere raken aan deze middelste bol en aan telkens drie zijvlakken van de kubus. Geef de straal van deze bollen.

(A) $1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ (D) $\dfrac{1}{4}$ (E) $\dfrac{\sqrt{3}(2-\sqrt{2})}{4}$

26. Tien mensen vormen samen een cirkel. Elk van hen bedenkt een getal en zegt het door aan zijn beide buren op deze cirkel. Daarna berekent ieder het gemiddelde van de getallen van zijn twee buren en deelt dit gemiddelde mee. In de figuur hiernaast worden deze gemiddelden weergegeven (dus <u>niet</u> de getallen die elke persoon bedacht). Welk was het getal dat de persoon die een gemiddelde van “6” berekende oorspronkelijk bedacht had?

“1”
“10” “2”
“9” “3”
“8” “4”
“7” “5”
“6”

(A) 1 (B) 5 (C) 6 (D) 10
(E) niet eenduidig uit de gegevens te bepalen

---

27. Welk van de volgende drietallen kan **<u>niet</u>** het drietal van de lengtes van de drie hoogtelijnen in een driehoek zijn?

(A) $1, \sqrt{3}, 2$ (B) $3, 4, 5$ (C) $5, 12, 13$ (D) $7, 8, \sqrt{113}$ (E) $8, 15, 17$

---

28. Een vierhoek met opeenvolgende zijden van lengte 70, 90, 130 en 110 is ingeschreven in een cirkel en heeft eveneens een ingeschreven cirkel in zich. Het raakpunt van de (in deze vierhoek) ingeschreven cirkel met de zijde van lengte 130 verdeelt die zijde in twee segmenten van lengte x en y (resp.). Bepaal $|x-y|$.

(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

---

29. Een deelverzameling van $\{1, 2, \ldots, 100\}$ heeft de eigenschap dat geen enkel van zijn elementen gelijk is aan het drievoud van een ander element. Wat is het grootste aantal elementen dat deze deelverzameling kan hebben?

(A) 50 (B) 66 (C) 67 (D) 76 (E) 78

---

30. Als $R_n = \frac{1}{2}(a^n + b^n)$ waarin $a = 3 + 2\sqrt{2}$, $b = 3 - 2\sqrt{2}$ en $n = 0, 1, 2, \ldots$, dan is R_{12345} een geheel getal. Wat is het cijfer van de eenheden in dit getal?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9
