1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1988-1989: Tweede Ronde

Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. is een officiële "foreign coordinator" voor de welbekende AHSME-competitie (American High School Mathematics Examination - USA en Canada). De 30 meerkeuzevragen van de tweede ronde van VWO zijn een vertaling van de AHSME vragen. Ook het quoteringssysteem van AHSME wordt overgenomen. Dit werkt als volgt: 0 punten voor een foutief antwoord, 2 punten voor een blanco antwoord en 5 punten voor een correct antwoord.

1.1 De problemen.

1. $(-1)^{5^2} + 1^{2^5} =$

$$(A)\quad -7 \qquad (B)\quad -2 \qquad (C)\quad 0 \qquad (D)\quad 1 \qquad (E)\quad 57$$

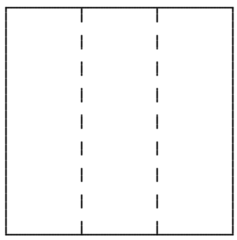
---

2. $\sqrt{\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{16}} =$

$$(A)\quad \frac{1}{5} \qquad (B)\quad \frac{1}{4} \qquad (C)\quad \frac{2}{7} \qquad (D)\quad \frac{5}{12} \qquad (E)\quad \frac{7}{12}$$

---

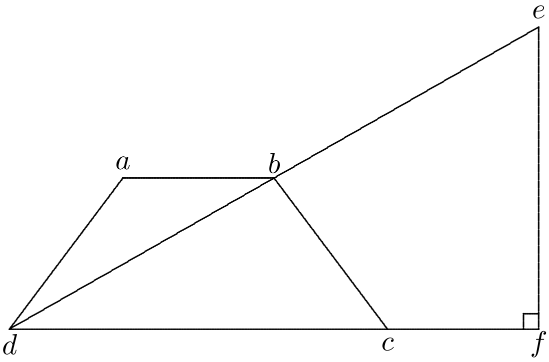
3. Men snijdt een vierkant in 3 rechthoekige stukken door middel van twee lijnen evenwijdig aan een zijde (zie figuur). De omtrek van elk van deze rechthoeken is 24. Bepaal nu de oppervlakte van het vierkant.



$$(A)\quad 24 \qquad (B)\quad 36 \qquad (C)\quad 64 \qquad (D)\quad 81 \qquad (E)\quad 96$$

---

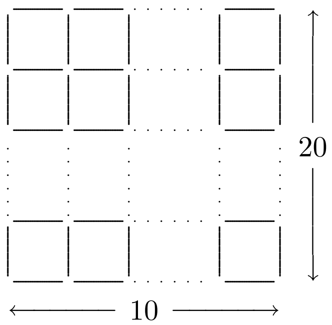
4. In de figuur is $abcd$ een gelijkbenig trapezium waarvan de zijden de volgende lengte hebben:
$|ad| = |bc| = 5$, $|ab| = 4$ en $|dc| = 10$.
Verder is een rechthoekige driehoek def gegeven zodat het punt c op het lijnstuk $[df]$ ligt en zodat b het midden is van de hypotenusa $[de]$.
Bepaal $|cf|$.



(A) 3.25 (B) 3.5 (C) 3.75 (D) 4.0 (E) 4.25

---

5. Met behulp van lucifers (van gelijke lengte) bouwt men een rechthoekig rooster zoals in de figuur aangegeven wordt. Indien dit rooster 20 lucifers hoog is en 10 lucifers breed, hoeveel lucifers heeft men dan gebruikt?



(A) 30 (B) 200 (C) 410 (D) 420 (E) 430

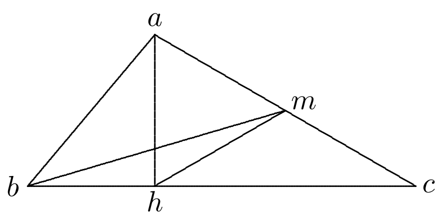
---

6. Onderstel $a, b > 0$. Onderstel verder dat de driehoek in het eerste kwadrant begrensd door de coördinaatassen en de grafiek van $ax + by = 6$ oppervlakte 6 heeft. Dan is ab gelijk aan

(A) 3 (B) 6 (C) 12 (D) 108 (E) 432

---

7. In Δabc geldt: $\angle a = 100°$, $\angle b = 50°$, $\angle c = 30°$, ah is een hoogtelijn en bm is een zwaartelijn. Dan is $\angle mhc$ gelijk aan



(A) 15° (B) 22.5° (C) 30° (D) 40° (E) 45°

8. Voor hoeveel gehele getallen n tussen 1 en 100 kan $x^2 + x - n$ ontbonden worden in een produkt van twee lineaire faktoren met gehele coëfficiënten?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 9 (E) 10

9. Mr. en Mevr. Zeta wensen hun kindje, baby Zeta, twee voornamen te geven zodanig dat het monogram van dit kindje (opeenvolging van de initialen van resp. de eerste voornaam, de tweede voornaam en de familienaam) in alfabetische volgorde zal staan (zonder herhaling van letters). Hoeveel dergelijke monogrammen zijn mogelijk?

(A) 276 (B) 300 (C) 552 (D) 600 (E) 15600

10. Beschouw de rij getallen die op de volgende wijze recursief gedefinieerd wordt: $u_1 = a$ (een willekeurig positief getal) en $u_{n+1} = -1/(u_n + 1)$ (voor $n = 1, 2, 3, ...$). Voor welk van de volgende waarden van n geldt: $u_n = a$?

(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

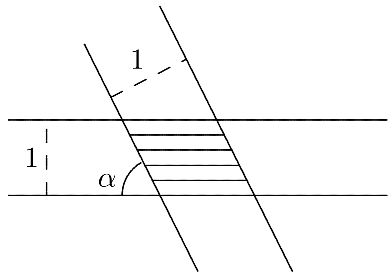
11. Onderstel dat a, b, c en d gehele getallen zijn zodat $a < 2b$, $b < 3c$, en $c < 4d$. Als $d < 100$, dan is de grootst mogelijke waarde voor a gelijk aan

(A) 2367 (B) 2375 (C) 2391 (D) 2399 (E) 2400

12. Het verkeer op een Oost–West autoweg beweegt in beide richtingen met een constante snelheid van 60 kilometer per uur. Een chauffeur die Oostwaarts rijdt ontmoet gedurende een periode van 5 minuten 20 voertuigen die Westwaarts rijden. Onderstel dat de voertuigen die Westwaarts rijden allen even ver van elkaar rijden. Welk van de volgende getallen benadert het best het aantal voertuigen in een 100–kilometer lange strook van de autoweg richting West.

(A) 100 (B) 120 (C) 200 (D) 240 (E) 400

13. Twee stroken, elk van breedte 1, overlappen elkaar schuin in een hoek α (zie figuur). De oppervlakte van het overlapte gebied (gearceerd) bedraagt dan



(A) $\sin\alpha$ (B) $\dfrac{1}{\sin\alpha}$ (C) $\dfrac{1}{1-\cos\alpha}$ (D) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ (E) $\dfrac{1}{(1-\cos\alpha)^2}$

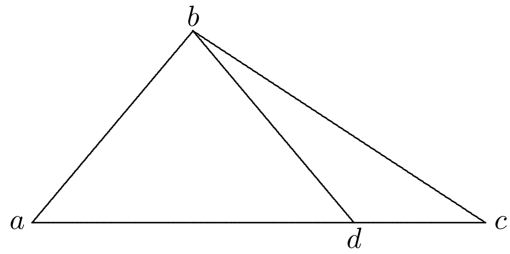
14.

$$\text{cotg } 10 + \text{tg } 5 =$$

(A) cosec 5 (B) cosec 10 (C) sec 5 (D) sec 10 (E) $\sin 15$

---

15. In Δabc geldt: $|ab| = 5$, $|bc| = 7$, $|ac| = 9$ en d ligt op het lijnstuk $[ac]$ met $|bd| = 5$. Vind de verhouding $\dfrac{|ad|}{|dc|}$.



(A) $\dfrac{4}{3}$ (B) $\dfrac{7}{5}$ (C) $\dfrac{11}{6}$ (D) $\dfrac{13}{5}$ (E) $\dfrac{19}{8}$

---

16. Een punt in het vlak dat gehele getallen als coördinaten heeft, noemt men een *roosterpunt* . Hoeveel roosterpunten liggen er op het lijnstuk met eindpunten $(3, 17)$ en $(48, 281)$? (Tel beide eindpunten van dit lijnstuk mee.)

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 16 (E) 46

---

17. Een gelijkzijdige driehoek heeft een omtrek die 1989 cm groter is dan de omtrek (> 0) van een vierkant. Elke zijde van de driehoek is d cm langer dan de zijden van het vierkant.
Hoeveel positieve gehele getallen zijn geen mogelijke waarde voor d?

(A) 0 (B) 9 (C) 221 (D) 663 (E) oneindig veel

---

18. De verzameling van alle reële getallen x waarvoor

$$x + \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

een rationaal getal is, is de verzameling van alle

(A) gehele getallen x
(B) rationale getallen x
(C) reële getallen x
(D) x waarvoor $\sqrt{x^2+1}$ rationaal is
(E) x waarvoor $x+\sqrt{x^2+1}$ rationaal is

---

19. Een driehoek is ingeschreven in een cirkel. De hoekpunten van de driehoek verdelen de cirkel in drie bogen met lengte resp. 3, 4 en 5. Bepaal de oppervlakte van de driehoek.

(A) 6 (B) $\frac{18}{\pi^2}$ (C) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}-1)$ (D) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}+1)$ (E) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}+3)$

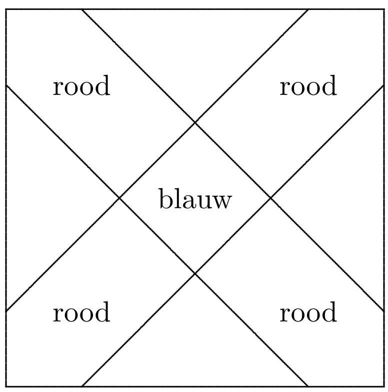
---

20. Zij x een reëel getal lukraak gekozen tussen 100 en 200 (alle getallen maken evenveel kans gekozen te worden). Bepaal de kans dat $\lfloor\sqrt{100x}\rfloor = 120$, als je weet dat $\lfloor\sqrt{x}\rfloor = 12$. ($\lfloor v \rfloor$ staat voor het grootste geheel getal kleiner dan of gelijk aan v)

(A) $\frac{2}{25}$ (B) $\frac{241}{2500}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{96}{625}$ (E) 1

---

21. Een vierkante vlag toont een rood kruis met even brede armen, met een blauw vierkant in het centrum en dit alles op een witte achtergrond. (zie figuur) (Het kruis is symmetrisch t.o.v. elk van de diagonalen van het vierkant.) Het volledige kruis (beide rode armen en het blauwe centrum te zamen) beslaat 36 % van de oppervlakte van de vlag. Welk procent van de oppervlakte van de vlag is blauw?



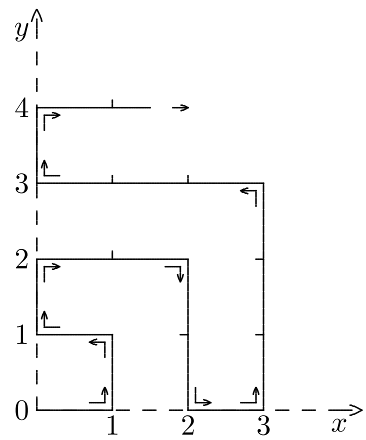
(A) 0.5 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 6

22. Een kind bezit een stel van 96 verschillende blokken. Elk van deze blokken bestaat uit één van de 2 materialen (*plastiek, hout*), in één van de 3 formaten (*klein, gemiddeld, groot*), in één van de 4 kleuren (*blauw, groen, rood, geel*), en in één van de 4 vormen (*rond, zeshoekig, vierkant, driehoekig*). Hoeveel blokken in dit stel verschillen in precies 2 aspecten van de *"plastieken, gemiddelde, rode, ronde"* blokken. (bvb. een *"houten, gemiddelde, rode, vierkante"* blok is er zo een.)

(A) 29 (B) 39 (C) 48 (D) 56 (E) 62

---

23. Een deeltje beweegt doorheen het eerste kwadrant als volgt: het begint bij de oorsprong en verplaatst zich naar het punt $(1, 0)$ tijdens de eerste minuut. Hierna beweegt het heen en weer tussen de positieve x–as en de positieve y–as, zoals in de figuur met behulp van de pijltjes aangegeven wordt. Hierbij legt het telkens 1 eenheid van afstand evenwijdig met een coördinaatas af in een tijdspanne van 1 minuut. Bepaal het punt waar dit deeltje zal zijn aangekomen na precies 1989 minuten.



(A) $(35, 44)$ (B) $(36, 45)$ (C) $(37, 45)$ (D) $(44, 35)$ (E) $(45, 36)$

24. Vijf personen zitten aan een ronde tafel. Noteer $v \geq 0$ voor het aantal personen dat naast ten minste één vrouw zit en $m \geq 0$ voor het aantal personen dat naast ten minste één man zit.
Bepaal het aantal mogelijke koppels (v, m).

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

---

25. In een interprovinciale sportontmoeting bekampen twee ploegen van elk 5 lopers elkaar. Een loper die op de n^{de} plaats eindigt bezorgt zijn ploeg n punten. Uiteindelijk wint de ploeg die het minst punten behaalt. Hoeveel verschillende winnende uitslagen zijn er mogelijk, in de onderstelling dat geen twee lopers gelijk eindigen?

(A) 10 (B) 13 (C) 27 (D) 120 (E) 126

---

26. Men vormt een regelmatig achtvlak door de middelpunten van de overstaande zijvlakken van een kubus te verbinden. De verhouding van het volume van het achtvlak tot het volume van de kubus is dan

(A) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{16}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ (E) $\frac{1}{4}$

27. Zij n een positief geheel getal. Als de vergelijking $2x + 2y + z = n$ 28 oplossingen heeft in strikt positieve gehele getallen x, y en z, dan moet n gelijk zijn aan

(A) 14 of 15 (B) 15 of 16 (C) 16 of 17 (D) 17 of 18 (E) 18 of 19

28. Vind de som van de wortels, gelegen tussen 0 en 2π (radialen), van de vergelijking $\mathrm{tg}^2 x - 9\mathrm{tg} x + 1 = 0$.

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) π (C) $\dfrac{3\pi}{2}$ (D) 3π (E) 4π

29. Bepaal

$$\sum_{k=0}^{49} (-1)^k \binom{99}{2k}$$

waarin $\binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$.

(A) -2^{50} (B) -2^{49} (C) 0 (D) 2^{49} (E) 2^{50}

---

30. Onderstel dat 7 jongens en 13 meisjes zich in een rij opstellen. Noteer S voor het aantal keren dat in de rij een jongen en een meisje naast elkaar staan. Bijvoorbeeld: voor de rij $MJJMMMJMJMMMJMJMMJMM$ geldt $S = 12$. Welk van de volgende getallen benadert het best de gemiddelde waarde van S (indien men alle mogelijke ordeningen van deze 20 mensen beschouwt)?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13
