1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1986–1987: Tweede Ronde.

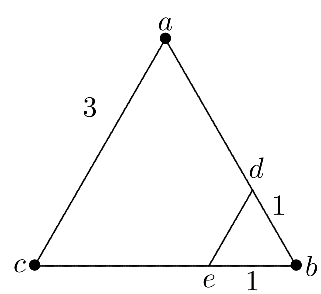
De tweede ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem werkt als volgt : een deelnemer start met 30 punten. Per goed antwoord krijgt hij of zij 4 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 0 punten en een foutief antwoord wordt als -1 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 2 uur.

1.1 De problemen.

1. $(1+x^2)(1-x^3)$ is gelijk aan

(A) $1-x^5$	(B) $1-x^6$	(C) $1+x^2-x^3$
(D) $1+x^2-x^3-x^5$	(E) $1+x^2-x^3-x^6$	

2. Uit een gelijkzijdige driehoek abc met zijden van lengte 3, snijdt men een driehoekige punt weg zodanig dat de zijden $[db]$ en $[eb]$ lengte 1 hebben (zie figuur). De omtrek van de overblijvende vierhoek $adec$ is dan



(A) 6	(B) $6,5$	(C) 7	(D) $7,5$	(E) 8

3. Hoeveel priemgetallen kleiner dan 100 hebben 7 als cijfer van de eenheden (wanneer voorgesteld in het tientallig stelsel)?

(A) 4	(B) 5	(C) 6	(D) 7	(E) 8

4. $$\frac{2^1+2^0+2^{-1}}{2^{-2}+2^{-3}+2^{-4}}$$
is gelijk aan

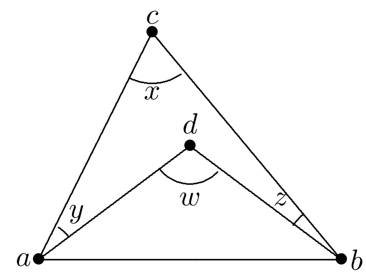
(A) 6	(B) 8	(C) $\frac{31}{2}$	(D) 24	(E) 512

5. Bij een reeks metingen noteerde een student de exacte relatieve frequentie verdeling (in %) zoals in de rechterkolom weergegeven. Hij verwaarloosde echter het totaal aantal metingen (N) te noteren. Wat is de kleinst mogelijke waarde van N?

meetresultaat	relatieve frequentie in %
0	12,5
1	0
2	50
3	25
4	12,5
	100

(A) 5	(B) 8	(C) 16	(D) 25	(E) 50

6. In de driehoek abc (zie figuur) is d een inwendig punt en zijn x, y, z en w de waarden van de hoeken in zestigdelige graden. Vind x in termen van y, z en w.

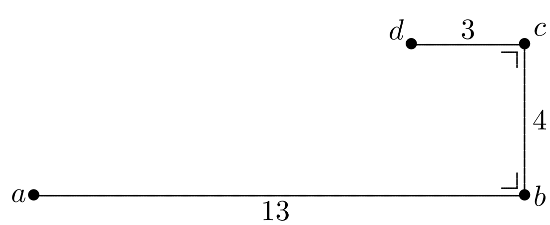


(A) $w - y - z$	(B) $w - 2y - 2z$	(C) $180 - w - y - z$
(D) $2w - y - z$	(E) $180 - w + y + z$	

7. Welk van de vier grootheden a, b, c of d is het grootst als je weet dat $a - 1 = b + 2 = c - 3 = d + 4$

(A) a	(B) b	(C) c
(D) d	(E) geen enkele is steeds de grootste	

8. De som van de afstanden $|ad|$ en $|bd|$ in de figuur is



(A) tussen 10 en 11	(B) 12	(C) tussen 15 en 16
(D) tussen 16 en 17	(E) 17	

9. In een rekenkundige rij zijn a, x, b en $2x$ de eerste vier termen. Wat is de verhouding van a tot b?

(A) $\frac{1}{4}$	(B) $\frac{1}{3}$	(C) $\frac{1}{2}$	(D) $\frac{2}{3}$	(E) 2

10. Hoeveel geordende drietallen (a, b, c) bestaande uit van nul verschillende reële getallen hebben de eigenschap dat elk van de drie getallen het produkt van de overige twee is?

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

11. Als c een constante is, dan heeft het stelsel

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ cx + y = 3 \end{cases}$$

een oplossing (x, y) in het eerste kwadrant als en slechts als

(A) $c = -1$	(B) $c > -1$	(C) $c < \frac{3}{2}$
(D) $0 < c < \frac{3}{2}$	(E) $-1 < c < \frac{3}{2}$	

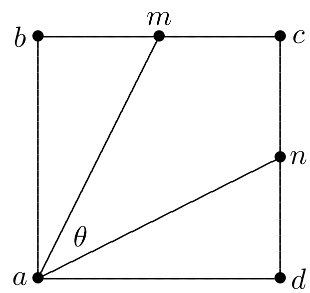
12. Op kantoor bezorgt een diensthoofd zijn secretaresse op verschillende tijdstippen van de dag een te typen brief. Dit doet hij/zij door deze brief telkens bovenaan op de nog te verwerken stapel van briefwisseling bij zijn secretaresse te leggen. Telkens ze tijd heeft, neemt de secretaresse de bovenste brief van deze stapel om deze te typen. In totaal bezorgt het diensthoofd 5 brieven in de volgorde 1-2-3-4-5 aan zijn secretaresse.
Welke van de volgende volgordes kan onmogelijk de volgorde zijn waarin deze brieven getypt worden?

(A) $1-2-3-4-5$	(B) $2-4-3-5-1$	(C) $3-2-4-1-5$
(D) $4-5-2-3-1$	(E) $5-4-3-2-1$	

13. Men maakt een rolletje papier (voor gebruik in kasregisters e.d.) door een lange strook papier van 5 cm breed 600 keren rond een kartonnen buisje van 2cm diameter te winden. Zo wordt een rolletje met een diameter van 10 cm bekomen. Hoe lang is die strook papier bij benadering in meters? (druk uit dat het papier 600 concentrische cirkels beschrijft met een diameter die uniform varieert van 2 cm tot 10 cm)

(A) 36π	(B) 45π	(C) 60π	(D) 27π	(E) 90π

14. *abcd* is een vierkant; m en n zijn de middelpunten van resp. $[bc]$ en $[cd]$. Dan is $\sin\theta$ gelijk aan



(A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$	(B) $\frac{3}{5}$	(C) $\frac{\sqrt{10}}{5}$
(D) $\frac{4}{3}$	(E) geen van deze waarden	

15. Wat is $x^2 + y^2$ als je weet dat (x, y) een oplossing is van het stelsel

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x^2y + xy^2 + x + y = 63 \end{cases}$$

(A) 13	(B) $\frac{1173}{32}$	(C) 55	(D) 69	(E) 81

16. Een specialist in geheimschrift ontwerpt de volgende de methode om de positieve getallen te coderen. Eerst schrijft men het getal in het talstelsel met grondtal 5; daarna legt men een bijectief verband tussen de verschillende cijfers die voorkomen in getallen voorgesteld in het talstelsel met grondtal 5 en de elementen van de verzameling {V,W,X,Y,Z}.
Gebruikmakend van dit codeersysteem vindt deze specialist dat drie opeenvolgende getallen in stijgende volgorde gecodeerd zijn als VYZ, VYX en VVW. Geef de uitdrukking in het 10-tallig stelsel voor het getal dat als XYZ gecodeerd is.

(A) 48	(B) 71	(C) 82	(D) 108	(E) 113

17. In de Vlaamse Wiskunde Olympiade behaalden Jan en Piet samen evenveel punten als An en Karel samen. Zo men de punten van Jan en Karel had omgewisseld, dan zou het gezamenlijk resultaat van An en Karel groter zijn geweest dan het resultaat van beide andere samen. Verder is het zo, dat Piet meer punten behaalde dan Jan en Karel samen.
Bepaal de rangorde - van hoog naar laag - waarin deze 4 deelnemers aan VWO scoorden. (Merk op dat de resultaten niet negatief kunnen zijn).

(A) Piet, An, Karel, Jan	(B) Piet, An, Jan, Karel
(C) Piet, Karel, Jan, An	(D) An, Piet, Karel, Jan
(E) An, Piet, Jan, Karel	

18. Om een boekenrek volledig te vullen heeft men A algebraboeken (allemaal even dik) en H meetkundeboeken (ook alle even dik, maar dikker dan de algebraboeken) nodig. Dit rek kon men evengoed vullen met S algebraboeken en M meetkundeboeken. Men kon het zelfs helemaal vullen met E algebraboeken alleen. Onderstel dat A, H, S, M en E verschillende positieve getallen zijn, dan is E gelijk aan

(A) $\dfrac{AM+SH}{M+H}$ (B) $\dfrac{AM^2+SH^2}{M^2+H^2}$
(C) $\dfrac{AH-SM}{M-H}$ (D) $\dfrac{AM-SH}{M-H}$
(E) $\dfrac{AM^2-SH^2}{M^2-H^2}$

19. Welk van de volgende getallen benadert het best $\sqrt{65}-\sqrt{63}$?

(A) $0,12$ (B) $0,13$ (C) $0,14$ (D) $0,15$ (E) $0,16$

20. Hoeveel is

$$\log_{10}(\operatorname{tg} 1^\circ) + \log_{10}(\operatorname{tg} 2^\circ) + \log_{10}(\operatorname{tg} 3^\circ) + \ldots + \log_{10}(\operatorname{tg} 88^\circ) + \log_{10}(\operatorname{tg} 89^\circ)$$

(A) 0 (B) $\dfrac{1}{2}\log_{10}(\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ (C) $\dfrac{1}{2}\log_{10} 2$
(D) 1 (E) geen van de vorige

21. Men kan een vierkant op twee natuurlijke wijzen in een gegeven gelijkbenige rechthoekige driehoek inschrijven. Als je het doet zoals getoond in figuur 1 dan vind je 441 cm^2 als oppervlakte voor het vierkant. Geef de oppervlakte (in cm^2) van het vierkant dat in dezelfde driehoek ingeschreven wordt zoals getoond in figuur 2.

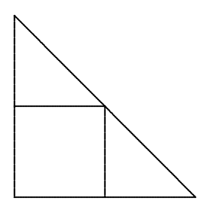


Fig.1

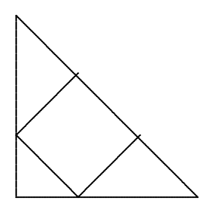


Fig.2

(A) 378 (B) 392 (C) 400 (D) 441 (E) 484

22. Toen het meer dichtvroor dreef er een bal op het water. Men haalde later de bal uit het ijs (zonder het ijs te breken). De opening die in het ijs bleef had een doorsnede van 24 cm bovenaan en was 8 cm diep. Vind de straal van deze bal (in cm).

(A) 8 (B) 12 (C) 13 (D) $8\sqrt{3}$ (E) $6\sqrt{6}$

23. Onderstel dat p een priemgetal is en dat allebei de nulpunten van de vergelijking $x^2 + px - 444p = 0$ gehele getallen zijn. Wat weet je dan van p?

(A) $1 < p \leq 11$	(B) $11 < p \leq 21$	(C) $21 < p \leq 31$
(D) $31 < p \leq 41$	(E) $41 < p \leq 51$	

24. Hoeveel veeltermfuncties f van graad ≥ 1 voldoen aan

$$f(x^2) = (f(x))^2 = f(f(x))?$$

(A) 0	(B) 1	(C) 2
(D) eindig veel maar dan 2	(E) oneindig veel	

25. abc is een driehoek: $a = (0, 0)$, $b = (36, 15)$ en de coördinaten van c zijn allebei gehele getallen. Wat is de kleinst mogelijke oppervlakte die deze driehoek kan hebben?

(A) $\frac{1}{2}$	(B) 1	(C) $\frac{3}{2}$
(D) $\frac{13}{2}$	(E) er is geen kleinst mogelijke oppervlakte	

26. Men splitst lukraak het getal 2,5 in twee niet negatieven reële getallen; bvb. in 2,143 en 0,357, of ook in $\sqrt{3}$ en $2,5 - \sqrt{3}$.
Daarna rondt men elk getal af tot op het dichtsbij zijnde geheel getal. (bvb. tot op 2 en 0 in het eerste hierboven, en 2 en 1 in het tweede) Wat is de kans dat de som van deze twee gehele getallen 3 is?

(A) $\frac{1}{4}$	(B) $\frac{2}{5}$	(C) $\frac{1}{2}$	(D) $\frac{3}{5}$	(E) $\frac{3}{4}$

27. Men snijdt een blok (kubus) kaas ($K = \{(x, y, z) | 0 \leq x, y, z \leq 1\}$) langs de vlakken x=y, y=z en z=x. Hoeveel stukken verkrijgt men dan? (Men verplaatst geen kaas *vóór* dat alle snijdingen gemaakt zijn!)

(A) 5	(B) 6	(C) 7	(D) 8	(E) 9

28. a, b, c en d zijn reële getallen. Onderstel dat alle wortels van de vergelijking $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ complexe getallen zijn die op een cirkel liggen in het complexe vlak met middelpunt $0 + 0i$ (de oorsprong) en straal 1. Dan is de som van de inversen van deze wortels

(A) a	(B) b	(C) c	(D) $-a$	(E) $-b$

29. Beschouw de rij getallen gedefinieerd door:

$$t_1 = 1$$

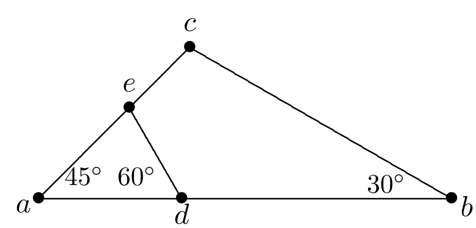
en voor $n > 1$

$$\begin{cases} t_n = 1 + t_{(n/2)} & \text{als n even is} \\ t_n = \frac{1}{t_{n-1}} & \text{als n oneven is} \end{cases}$$

Als je weet dat $t_n = \frac{19}{87}$. Wat is dan de som van de cijfers van n?

(A) 15	(B) 17	(C) 19	(D) 21	(E) 23

30. In de figuur van driehoek abc is de hoek in a 45 graden en die in b 30 graden. Neem een punt d op $[ab]$ zo dat de hoek $\widehat{ade}$ 60 graden meet. Aldus verdeelt de rechte de driehoek abc in twee stukken. Onderstel nu dat deze twee stukken eenzelfde oppervlakte hebben. (Pas op: betrouw niet op de figuur; misschien ligt e op $[cb]$ i.p.v. op $[ac]$.)



Wat is de verhouding $\dfrac{|ad|}{|ab|}$?

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	(B) $\dfrac{2}{(2+\sqrt{2})}$	(C) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
(D) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}$	(E) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{12}}$	