

1 Junior Wiskunde Olympiade 2005-2006: tweede ronde

Volgende benaderingen kunnen nuttig zijn bij het oplossen van sommige vragen.

$$\sqrt{2} \approx 1,4142$$

$$\sqrt{3} \approx 1,7321$$

$$\sqrt{5} \approx 2,2361$$

$$\pi \approx 3,1416$$

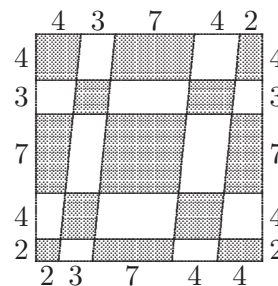
1. Als $a^2 \cdot a^{17} \cdot a^m = a^{2006}$, met $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$, dan is m gelijk aan

(A) 2 (B) 17 (C) 59 (D) 1972 (E) 1987

2. Jan, Karel, Leen, Ilse en Bart zijn leerlingen in dezelfde school. Drie van hen zitten in het vierde leerjaar en de twee overigen in het derde leerjaar. Als Jan en Karel in hetzelfde leerjaar zitten, Karel en Ilse in een verschillend leerjaar en Ilse en Bart ook in een verschillend leerjaar, welke leerlingen zitten dan in het derde leerjaar?

(A) Leen en Ilse (B) Jan en Ilse (C) Karel en Bart
(D) Karel en Leen (E) Jan en Karel

3. De zijden van een vierkant worden onderverdeeld in een aantal stukken met lengten zoals in de figuur. Wat is de oppervlakte van het gearceerde gedeelte?



(A) 192 (B) 200 (C) 208 (D) 212 (E) 218

4. Als $\sqrt{2\sqrt{8\sqrt{x}}} = 16$ dan is $x =$

(A) 2^{10} (B) 2^{20} (C) 2^{22} (D) 2^{24} (E) 2^{28}

5. Vijf leerlingen zitten naast elkaar op 5 stoelen, die genummerd zijn van 1 tot 5. Dan verplaatsen ze zich volgens het schema in de volgende tabel:

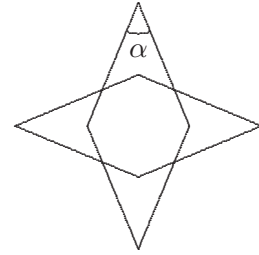
van stoel	1	2	3	4	5
	↓	↓	↓	↓	↓
naar stoel	3	1	4	2	5

Telkens weer verplaatsen ze zich volgens deze tabel.

Waar zit de leerling die bij de start op de eerste stoel zat, na 2006 verplaatsingen?

(A) op stoel 1 (B) op stoel 2 (C) op stoel 3
(D) op stoel 4 (E) op stoel 5

6. Twee congruente ruiten waarvan de assen dezelfde dragers hebben snijden elkaar, zodat hun doorsnede een regelmatige achthoek is (zie figuur). Bepaal de scherpe hoek α .



- | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| (A) $30^\circ < \alpha < 35^\circ$ | (B) $35^\circ < \alpha \leq 40^\circ$ | (C) $40^\circ < \alpha \leq 45^\circ$ |
| (D) $45^\circ < \alpha \leq 50^\circ$ | (E) $50^\circ < \alpha \leq 60^\circ$ | |

7. Voor $x \neq 0$ geldt

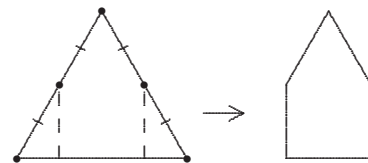
$$(x^2 + 1)^2 - \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)^2 =$$

- | | |
|---|---|
| (A) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^4$ | (B) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 \left(x - \frac{1}{x}\right)$ |
| (C) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ | (D) $\left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x - \frac{1}{x}\right)^3$ |
| (E) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^4$ | |

8. Wat is de oplossing van $|3x + 1| < 5$?

- | | | | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| (A) $\left\{-\frac{4}{3}, 2\right\}$ | (B) $\left]-2, \frac{4}{3}\right[$ | (C) $\left[-\frac{4}{3}, 2\right]$ | (D) $\left[-2, \frac{4}{3}\right]$ | (E) $\left]0, \frac{4}{3}\right[$ |
|--------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|

9. Als je van een gelijkzijdige driehoek twee zijstukken wegsnijdt op de aangeduide manier, welk oppervlakte-deel heb je dan van de oorspronkelijke driehoek weggesneden?



- | | | |
|----------------------------|-------------------|-------------------|
| (A) meer dan $\frac{1}{2}$ | (B) $\frac{1}{2}$ | (C) $\frac{1}{3}$ |
| (D) $\frac{1}{4}$ | (E) $\frac{1}{8}$ | |

10. Als $x + y = 0$ en $x^2 + y^2 = a^2$ dan is $x^4 + y^4$ gelijk aan

- | | | | | |
|------------|------------|-----------|---------------------|---------------------|
| (A) $2a^2$ | (B) $4a^2$ | (C) a^4 | (D) $\frac{a^4}{4}$ | (E) $\frac{a^4}{2}$ |
|------------|------------|-----------|---------------------|---------------------|

11. Als de beurs

- I. een dag 2% stijgt, gevolgd door twee opeenvolgende dagen een daling van 1%;
 II. een dag 2% daalt, gevolgd door twee opeenvolgende dagen een stijging van 1%
 dan geldt

- (A) Verlies in I en II, en in I het kleinste verlies.
 (B) Verlies in I en II, en in II het kleinste verlies.
 (C) Winst of verlies zijn in I en II gelijk.
 (D) In I winst en in II verlies.
 (E) In I verlies en in II winst.

12. Hoeveel van volgende uitdrukkingen zijn steeds strikt positief voor alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ met $x > y$?

- I. $x^2 + y^3$ II. $x^3 + y^2$ III. $x^2 - y$ IV. $x - y^2$

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

13. Als a en b gelijk zijn aan 6, dan geldt dat $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{3}$. Als a en b verschillende natuurlijke getallen zijn, dan geldt dezelfde gelijkheid alleen als $a + b$ gelijk is aan

- (A) 3 (B) 6 (C) 12 (D) 16 (E) 18

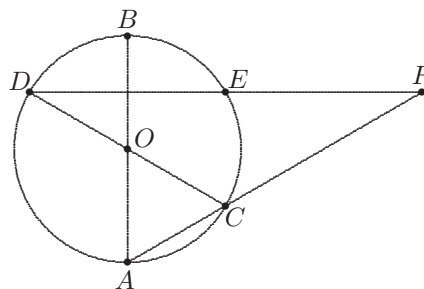
- 14.

$$\frac{2005}{2006^2 - 2005 \cdot 2007}$$

is gelijk aan

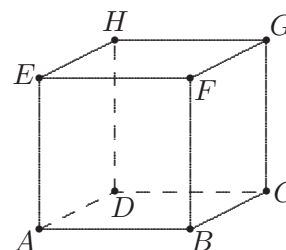
- (A) 1 (B) 2005 (C) 2006
 (D) 2007 (E) een negatief getal

15. AB en CD zijn twee middellijnen van een cirkel met middelpunt O . DE is bovendien de middelloodlijn van $[OB]$. Hoe groot is de hoek \widehat{EFC} ?



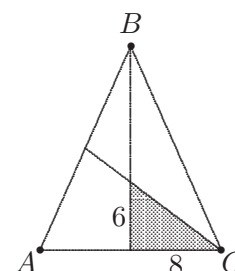
- (A) 20° (B) 25° (C) 30° (D) 45° (E) 60°

16. De ribben van deze kubus zijn gelijk aan 2. De omtrek p van de cirkel door de punten A , E en C voldoet dan aan



- | | | |
|-------------------|------------------|-------------------|
| (A) $p < 9$ | (B) $9 < p < 10$ | (C) $10 < p < 11$ |
| (D) $11 < p < 12$ | (E) $12 < p$ | |

17. Door in een gelijkbenige driehoek ABC twee zwaartelijnen te tekenen (waarvan één uit de top B) ontstaat er een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 6 en 8 (zie figuur).



- Hoe groot is de som van de lengten van de drie zwaartelijnen van driehoek ABC ?

- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| (A) 42 | (B) 48 | (C) 52 | (D) 72 | (E) 78 |
|--------|--------|--------|--------|--------|

18. De leerlingen van een klas willen een geschenk kopen voor hun jarige leraar. Als ze elk € m geven dan is er een overschot van € n , maar als ze elk € p geven is er een tekort van € q . Hoeveel leerlingen zijn er in deze klas?

- | | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| (A) $\frac{n+q}{m-p}$ | (B) $\frac{n+q}{p-m}$ | (C) $\frac{n+q}{p+m}$ | (D) $\frac{n-q}{p+m}$ | (E) $\frac{n-q}{m-p}$ |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|

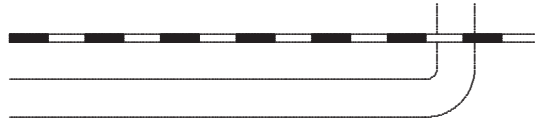
19. Een blad papier is 0,1 mm dik. Men snijdt dit blad in twee en legt de twee delen op elkaar zodat de totale dikte 0,2 mm bedraagt. Onderstel dat men daarna nog 13 keer het hele pak in twee snijdt en telkens de twee delen op elkaar legt. Hoe dik is het uiteindelijk pak?

- | | | |
|------------|--------------------|------------|
| (A) 1,4 mm | (B) 1,4 cm | (C) 1,4 dm |
| (D) 1,4 m | (E) meer dan 1,4 m | |

20. De cijfers van 0 tot en met 5 worden op de hoekpunten van een regelmatige zeshoek geplaatst op zulke manier dat de som van twee cijfers aan dezelfde zijde steeds een priemgetal is. Welk cijfer staat er dan in het hoekpunt tegenover de 2?

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| (A) 0 | (B) 1 | (C) 3 | (D) 4 | (E) 5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|

21. Een straat loopt evenwijdig met een spoorweg en buigt op een gegeven moment over die spoorweg.



Een man fietst elke dag naar zijn werk met een constante snelheid van 18 km/h. Aan de overweg komt hij dan telkens een trein tegen die in dezelfde richting met constante snelheid rijdt. Op een dag vertrekt de man 15 minuten later en passeert de trein hem 6 km vóór de overweg. Hoe snel rijdt deze trein?

- (A) 72 km/h (B) 80 km/h (C) 85 km/h (D) 96 km/h (E) 105 km/h

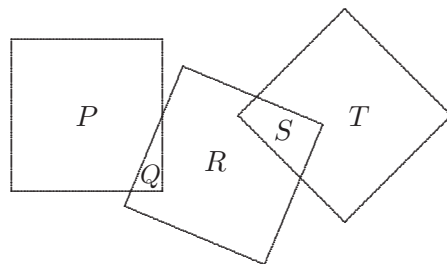
22. Op commercieel geruit papier (elk ruitje meet 4 mm bij 8 mm) wordt een vierkant van 1 cm bij 1 cm getekend met zijden evenwijdig met de lijntjes van het papier. Hoeveel ruitjes kunnen hierdoor maximaal geheel of gedeeltelijk bedekt worden?

- (A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 14

23. Op een cirkel ligt een vast punt A . Men kiest willekeurig een punt B , verschillend van A , op de cirkel. Wat is de kans dat $[AB]$ een lengte heeft kleiner dan de straal van de cirkel?

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{\pi}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{1}{6}$

24. Gegeven zijn drie congruente vierkanten. P , Q , R , S en T stellen de oppervlakten voor van de vijf disjuncte aangeduide gebieden (zie figuur). Welke van volgende uitspraken is fout?



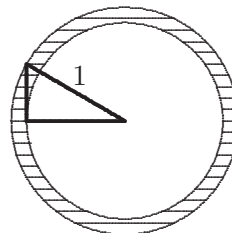
- (A) $P = R + S$ (B) $Q = S + T - P$
 (C) $R = \frac{1}{2}(P - S + T - Q)$ (D) $S = P - Q + T$
 (E) $T = Q + R$

25. De som van de cijfers van $\frac{10^{2006} + 2006}{9}$ is gelijk aan

- (A) 2006 (B) 2013 (C) 2016 (D) 2226 (E) 2229

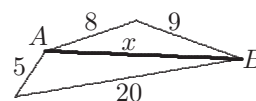
26. Een $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ driehoek met schuine zijde 1 wentelt om het hoekpunt van de kleinste hoek. Hierdoor beschrijven de andere twee hoekpunten twee concentrische cirkels.

Wat is de oppervlakte van de gearceerde ring?



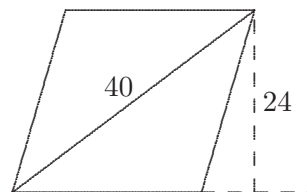
- | | | | | |
|-------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| (A) 1 | (B) $\frac{\pi}{2}$ | (C) $\frac{\pi}{3}$ | (D) $\frac{\pi}{4}$ | (E) $\frac{\pi}{6}$ |
|-------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|

27. Het lijnstuk $[AB]$ in bijgaande figuur heeft een lengte x . Als je weet dat alle lengtes een geheel aantal cm zijn, dan is x in cm gelijk aan



- | | | |
|--------|--|--------|
| (A) 15 | (B) 16 | (C) 17 |
| (D) 18 | (E) te weinig gegevens om x te bepalen | |

28. In dit parallellogram, dat tevens een ruit is, meet de langste diagonaal 40 en de hoogte 24. Bepaal de lengte van de andere diagonaal.



- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| (A) 28 | (B) 30 | (C) 32 | (D) 34 | (E) 36 |
|--------|--------|--------|--------|--------|

29. In driehoek ABC is $\hat{A} = 45^\circ$. Er worden punten $P \in [BC]$, $Q \in [AB]$ en $R \in [AC]$ gekozen zodat $|BP| = |QP|$ en $|CP| = |RP|$. Dan is \widehat{QPR} gelijk aan

- | | | |
|-----------------|--------------------------------------|-----------------|
| (A) 90° | (B) 95° | (C) 100° |
| (D) 105° | (E) afhankelijk van de keuze van P | |

30. Van vijf getallen a, b, c, d, e is geweten dat hun som gelijk is aan 2006 en dat

$$\frac{a}{7} = \frac{b}{9} = \frac{c}{11} = \frac{d}{13} = \frac{e}{19}.$$

Welk van deze vijf getallen is gelijk aan 238?

- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| (A) a | (B) b | (C) c | (D) d | (E) e |
|---------|---------|---------|---------|---------|