12 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1999-2000: Eerste ronde.

De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem werkt als volgt: per goed antwoord krijgt de deelnemer 5 punten, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 1 punt en een foutief antwoord wordt als 0 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 3 uur.

12.1 De problemen

1. Als $\frac{1}{x} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a}$, dan is x gelijk aan

(A) $a+b$	(B) $\frac{b-a}{ab}$	(C) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$	(D) $\frac{ab}{a+b}$	(E) $a-b$

2. Een regelmatige n-hoek heeft evenveel zijden als diagonalen. Waaraan is n gelijk?

(A) 4	(B) 5	(C) 6
(D) 8	(E) n kan verschillende waarden aannemen	

3. In een doos liggen 10 rode, 10 blauwe en 10 groene kaartjes, elk genummerd van 1 tot 10. Men neemt de rode weg die een veelvoud van 3 zijn, de blauwe die even zijn en de groene die priem zijn. Hoeveel procent van de kaartjes blijft over in de doos?

(A) 0,6%	(B) 6%	(C) 18%	(D) 30%	(E) 60%

4. Filip is een kluns met zijn rekentoestel. In plaats van een positief getal met 3 te vermenigvuldigen, deelt hij het door 3 en kwadrateert daarna het resultaat in plaats van de vierkantswortel te nemen. Hij bekomt de (foutieve) uitkomst 16. Wat is de juiste uitkomst?

(A) 6	(B) 12	(C) 16	(D) 18	(E) 36

5. Voor $x \in \mathbb{R}$ is de kleinste waarde van $\left|x + \frac{1}{x}\right|$ gelijk aan

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$	(B) $\sqrt{2}$	(C) 2	(D) $\frac{3}{2}$	(E) $2\sqrt{2}$

6. Een magisch vierkant van orde 3 met som 0 is een 3×3 matrix van reële getallen zodanig dat de som in elke rij, in elke kolom en op de twee diagonalen 0 is.
Gegeven:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{bmatrix}$$

Op hoeveel manieren kan je deze matrix aanvullen tot een dergelijk magisch vierkant?

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) oneindig veel

7. Hoeveel strikt positieve, gehele getallen kunnen niet geschreven worden als een som met uitsluitend termen 5, 7 of 11? (Let op: sommen met één term zijn toegelaten.)

(A) 6	(B) 8	(C) 10	(D) 12	(E) minstens 14

8. Op een stafkaart met schaal 1 : 10.000 is de afstand tussen twee dorpen 20 cm. Hoe groot is de afstand tussen dezelfde twee dorpen op een kaart met schaal 1 : 25.000?

(A) 2 cm	(B) 4 cm	(C) 8 cm	(D) 10 cm	(E) 50 cm

9. Een leerling is ofwel gezond, ofwel ziek. Onderstel dat als een leerling vandaag gezond is, er 95% kans is dat hij morgen nog gezond is en, als een leerling vandaag ziek is dat er 55% kans is dat hij morgen nog ziek is. Als vandaag 20% van de leerlingen ziek is, hoeveel procent zieken verwachten we dan morgen?

(A) 11%	(B) 15%	(C) 50%	(D) 55%	(E) 60%

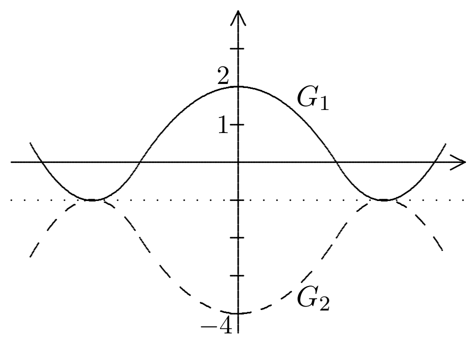
10. Het aantal oplossingen in $\mathbb{R}$ van de vergelijking

$$\left|1 - x^2\right| = 1 - x$$

is gelijk aan

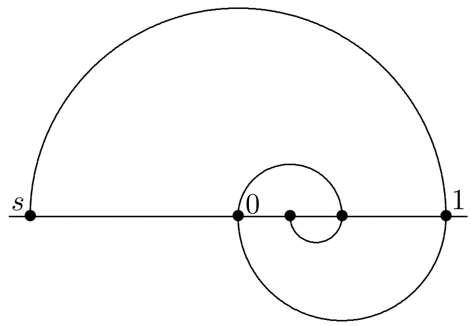
(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

11. Als G_1 de grafiek is van $y = f(x)$, dan is G_2 de grafiek van



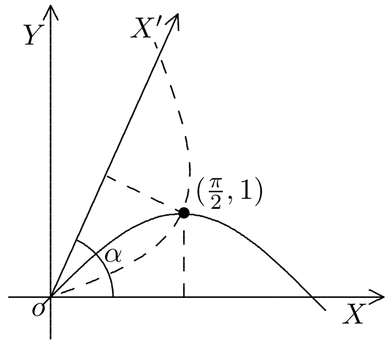
(A) $y = -f(x)$	(B) $y = f(-x)$	(C) $y = f(x) - 6$
(D) $y = -f(x) - 1$	(E) $y = -f(x) - 2$	

12. Vertrek van punt s en construeer een halve cirkel met straal 1. Zet deze kromme voort met een halve cirkel met straal $\frac{1}{2}$ zoals op de figuur. Blijf de kromme verder zetten, zodanig dat de straal van elke halve cirkel de helft is van de straal van voorgaande halve cirkel. Bepaal de afstand tussen s en het "eindpunt".



(A) $\frac{4}{3}$	(B) $\frac{3}{2}$	(C) $\frac{\pi}{3}$	(D) $\sqrt{2}$	(E) $\frac{\pi}{2}$

13. Spiegel de X-as van een orthonormaal assenstelsel en de grafiek van $y = \sin x$ t.o.v. de rechte die de oorsprong met het punt $(\frac{\pi}{2}, 1)$ verbindt.
De gespiegelde X-as vormt met de oorspronkelijke X-as een hoek α waarvoor geldt:



(A) $\sin\alpha = \frac{2}{\pi}$	(B) $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+\pi^2}}$	(C) $\sin\alpha = \frac{4\pi}{4+\pi^2}$
(D) $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{\pi^2-4}}{\pi^2}$	(E) $\sin\alpha = 1$	

14. Een leraar wil voor elke leerling uit zijn klas de gemiddelde score m van drie toetsen bepalen. Hij berekent voor elk van de leerlingen eerst het gemiddelde van de twee minst goede scores en daarna het gemiddelde van dat resultaat en de beste score. Hij vindt voor elke leerling steeds een getal dat

(A) strikt kleiner is dan m.	(B) strikt groter is dan m.
(C) gelijk is aan m.	(D) niet kleiner is dan m.
(E) niet groter is dan m.	

15. $P = (1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\ldots(1+\frac{1}{1998})(1+\frac{1}{1999})(1+\frac{1}{2000})$. Er geldt

(A) $P < 1000$	(B) $P = 1000$	(C) $1000 < P < 2000$
(D) $P = 2000$	(E) $P > 2000$	

16. $\sqrt{2000^{2000}}$ is een getal dat op veel nullen eindigt. Het meest rechtse cijfer dat niet nul is, is

(A) 2	(B) 4	(C) 6	(D) 8	(E) oneven

17. Hoeveel van volgende uitspraken zijn juist in $\mathbb{Z}$?

$$\forall y, \exists x : x^2 = y$$

$$\exists y, \forall x : x^2 = y$$

$$\forall x, \exists y : x^2 = y$$

$$\exists x, \forall y : x^2 = y$$

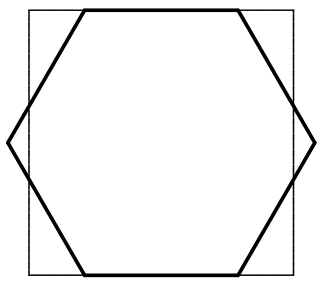
$$\exists x, \exists y : x^2 = y$$

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 4

18. In een rechthoekige driehoek meet één van de hoeken 25°. Welke hoek maken de zwaartelijn en de hoogtelijn uit de rechte hoek?

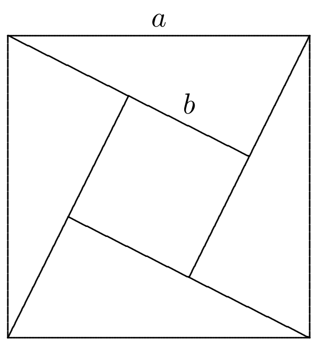
(A) 25°	(B) 30°	(C) 35°	(D) 40°	(E) 45°

19. Vertrekkend van een vierkant met zijde 1 wordt een regelmatige zeshoek geconstrueerd met hetzelfde middelpunt als het vierkant, zoals in de figuur. Bepaal de oppervlakte van de doorsnede van de twee figuren.



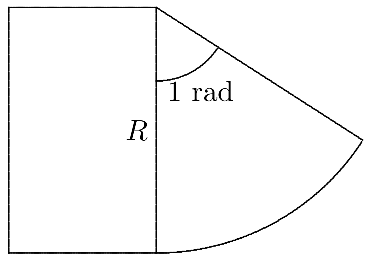
(A) $\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$	(B) $1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}$	(C) $2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$	(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	(E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

20. In de figuur wordt een groot vierkant met zijde a verdeeld in een klein vierkant en vier rechthoekige driehoeken. Als de oppervlakte van elke rechthoekige driehoek gelijk is aan deze van het kleine vierkant, dan is de zijde b van het kleine vierkant gelijk aan



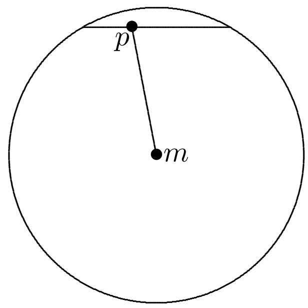
(A) $\frac{a}{\sqrt{5}}$	(B) $\frac{a}{2}$	(C) $\frac{2a}{5}$	(D) $a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	(E) $a\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}$

21. Een cirkelsector met straal R en een openingshoek van 1 radiaal heeft dezelfde oppervlakte als een rechthoek met lengte R. De breedte van die rechthoek is dan gelijk aan



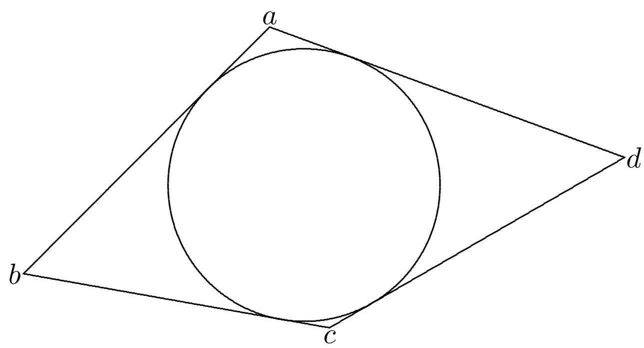
(A) $\frac{\pi R}{4}$	(B) $\frac{R}{2}$	(C) $\frac{R}{3}$	(D) $\frac{2R}{\pi}$	(E) R

22. De diameter van een cirkel met middelpunt m is 110 cm. Een punt p gelegen op een koorde verdeelt deze in stukken van 30 en 60 cm. Dan is $|pm|$ in cm gelijk aan



(A) 28	(B) 30	(C) 32	(D) 33	(E) 35

23. In de figuur is $abcd$ een vierhoek omgeschreven aan een cirkel. Als $|ab| = 4$, $|bc| = 5$ en $|cd| = 3$, dan is $|ad|$ gelijk aan

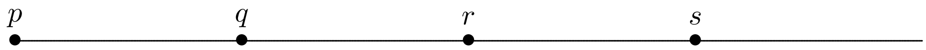


(A) 1	(B) 2	(C) 2,4	(D) 3	(E) 3,75

24. 9 witte en 18 zwarte kubussen met ribbe 1 worden aan elkaar vastgemaakt zodanig dat ze één grote kubus vormen met ribbe 3. Het gedeelte van de oppervlakte van de grote kubus dat wit kan zijn, bedraagt hoogstens

(A) $\frac{1}{2}$	(B) $\frac{13}{27}$	(C) $\frac{25}{54}$	(D) $\frac{4}{9}$	(E) $\frac{1}{3}$

25. p, q, r en s zijn punten op een rechte op 1 meter van elkaar en in de volgorde zoals hieronder.



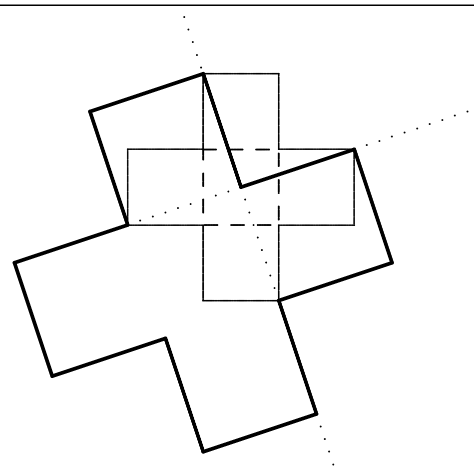
Bepaal de lengte in meter van de kortste weg van p naar s zodanig dat je minstens 1 meter blijft van q en r.

(A) $1+2\sqrt{2}$	(B) 4	(C) $1+\pi$	(D) $\frac{4}{3}\pi$	(E) 5

26. Ik koop 6 potloden, 5 kleurpotloden, 8 schriftjes en 12 vellen gekleurd papier. De prijs van een potlood is 14 BEF, de prijs van een kleurpotlood is 20 BEF. De andere prijzen ben ik vergeten, maar zijn gehele getallen. Welk van de volgende bedragen was het mogelijk eindtotaal?

(A) 150 BEF	(B) 200 BEF	(C) 250 BEF	(D) 300 BEF	(E) 350 BEF

27. Vanuit een klein Grieks kruis, opgebouwd uit 5 congruente vierkanten, wordt een groter geconstrueerd waarvan zijden gelegen zijn op de orthogonale diagonalen (en hun verlengden) van het klein Grieks kruis (zie figuur). Bepaal de verhouding van de oppervlakte van het groot kruis t.o.v. deze van het klein kruis.



(A) 2	(B) $\frac{\sqrt{10}}{2}$	(C) $\frac{5}{2}$	(D) $\frac{8}{3}$	(E) 3

28. Op een nacht kon de koning niet slapen en hij ging naar de koninklijke keuken en vond er een doos koekjes waarvan hij $\frac{1}{8}$ opat. Later had de koningin honger en at $\frac{1}{6}$ op van wat haar echtgenoot had overgelaten. Nog later kwam de prinses naar beneden en at $\frac{1}{7}$ op van wat nog over was. Daarna kwam de prins naar de keuken en at $\frac{1}{5}$ van het overschot. Het hondje van de prins stal ten slotte $\frac{1}{4}$ van de overgebleven koekjes. Wie at het meeste koekjes?

(A) koning	(B) koningin	(C) prinses	(D) prins	(E) hondje

29. Een jogger maakt rondjes van 400 m in een park, waarbij hij zijn eerste ronde aan een constante snelheid v aflegt in precies 2 minuten. Bij elke volgende ronde verhoogt hij zijn snelheid met 5% van v, zonder dat hij daarbij het maximum van zijn prestatievermogen, zijnde 1 minuut 20 seconden voor één ronde, overschrijdt. Hoeveel rondjes zal hij maximaal afleggen?

(A) 7	(B) 8	(C) 9	(D) 10	(E) 11

30. Vul in elk vakje een cijfer van 1 tot 9 in zodat

$$\square\square\% \text{ van } \square\square\square\square$$

gelijk is aan 2000. Dan staat er in het eerste vakje van links een

(A) 2	(B) 4	(C) 6
(D) 8	(E) niet te bepalen cijfer.	

Inhoudsopgave