1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1998-1999: Eerste ronde.

De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem werkt als volgt: per goed antwoord krijgt de deelnemer 5 punten, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 1 punt en een foutief antwoord wordt als 0 aangerekend. De voorzien antwoordduur bedraagt 3 uur.

1.1 De problemen

1. Welke van de vijf volgende uitdrukkingen is niet gelijk aan de overige vier?

(A) $(2^4)^8$	(B) $(4^2)^8$	(C) $2^{16}.16^2$	(D) $2^{16}.2^{16}$	(E) $4^8.4^8$

2. Neem a, b, c en d elementen in $\mathbb{R}_0$. Wat is het maximaal aantal verschillende getallen onder de volgende vijf?

$$(a:b):(c:d) \quad , \quad ((a:b):c):d \quad , \quad (a:(b:c)):d$$

$$a:((b:c):d) \quad , \quad a:(b:(c:d))$$

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

3. Wentelt men een rechthoek met afmetingen a en b ($a \neq b$) om een zijde met lengte a (resp. b), dan noemt men de inhoud van de ontstane cilinder I_a (resp. I_b). Bepaal de verhouding $\dfrac{\mathrm{I}_a}{\mathrm{I}_b}$.

(A) $\dfrac{a}{b}$	(B) $\dfrac{b}{a}$	(C) 1	(D) $\dfrac{a^2}{b^2}$	(E) $\dfrac{b^2}{a^2}$

4. De middelpunten van vier cirkels (in het vlak) met straal 1 zijn de hoekpunten van een vierkant met zijde 1. Door hoeveel punten gaan er minstens twee van deze cirkels?

(A) 4	(B) 6	(C) 8	(D) 12	(E) 16

5. Een rechthoek wordt verdeeld in vier rechthoekjes met oppervlakten zoals in de figuur. Wat is de oppervlakte van het vierde stuk?

6	10
15	?

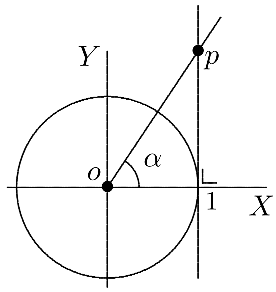
(A) 9	(B) 21	(C) 25	(D) 30	(E) 32

6. Vijf sympathieke leerlingen willen voor hun lerares wiskunde een verjaardagscadeautje kopen.
   - Gunther denkt dat ze 38 wordt op 16 maart.
   - Kris denkt dat ze 40 wordt op 17 april.
   - Luk denkt dat ze 38 wordt op 17 april.
   - Olivier denkt dat ze 38 wordt op 17 maart.
   - Steven denkt dat ze 40 wordt op 16 maart.

   Als we aannemen dat één van hen gelijk heeft en de anderen niet volledig ongelijk (d.w.z. ze hebben minstens de leeftijd of de dag of de maand correct), wie heeft dan gelijk?

(A) Gunther	(B) Kris	(C) Luk	(D) Olivier	(E) Steven

7. In de volgende figuur is $|op|$ gelijk aan



(A) 1	(B) $\cos\alpha$	(C) $\dfrac{1}{\cos\alpha}$	(D) $1+\operatorname{tg}\alpha$	(E) $\sqrt{1+\sin^2\alpha}$

8. Als p met coördinaat $(-x, y)$ in het derde kwadrant ligt, wat is dan de coördinaat van het spiegelbeeld van p ten opzichte van de bissectrice van het tweede en het vierde kwadrant?

(A) (x, y)	(B) (y, x)	(C) $(y, -x)$	(D) $(x, -y)$	(E) $(-y, x)$

9. Als $x^4 + 4x^3 + 6px^2 + 4qx + r$ deelbaar is door $x^3 + 3x^2 + 9x + 3$, dan is $(p+q)r$ gelijk aan

(A) -18	(B) 12	(C) 15	(D) 27	(E) 45

10. In een orthonormaal assenstelsel begrenzen de parabolen met vergelijking

$$y = x^2 - 4x - 5 \quad \text{en} \quad y = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x - 5)$$

een gebied. Wat is de oppervlakte van de kleinste rechthoek, met zijden evenwijdig aan de coördinaatassen, die dat gebied omvat?

(A) 18	(B) 27	(C) 54	(D) 72	(E) 81

11. Hoeveel functies zijn er met domein $\{1, 2, 3, 4\}$ en met waarden in $\{1, 2, 3\}$?

(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) 64 (E) 81

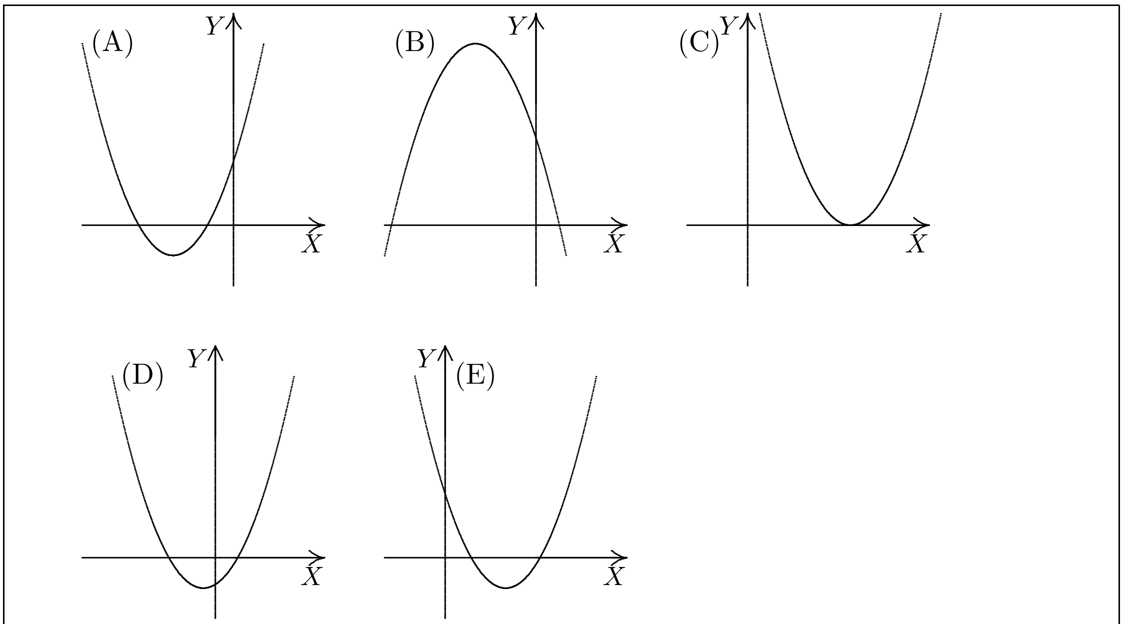
12. Beschouw de volgende drie functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$:

$$f(x) = |1 - x| \quad , \quad g(x) = 1 - |x| \quad , \quad h(x) = |1 - |x||.$$

Dan geldt, voor alle x in $\mathbb{R}$:

(A) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ (B) $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$
(C) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ (D) $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$
(E) $h(x) \leq g(x) \leq f(x)$

13. Welke van de volgende vijf parabolen is de grafiek van een kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ waarbij alle drie de getallen a, b en c strikt positief zijn?



14. Als $0 < x < 2\pi$ en $\sin x \,.\, \cos x \,.\, \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{cotg} x < 0$, dan behoort x tot

(A) $]0, \pi[$ (B) $]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ (C) $]\pi, 2\pi[$
(D) $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ (E) $]\frac{\pi}{2}, \pi[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$

15. We beschouwen alle natuurlijke getallen bestaande uit drie cijfers (elk verschillend van nul) met de eigenschap dat één van de cijfers de som is van de twee andere (b.v. 154, 743, ...). Hoeveel dergelijke getallen zijn er?

(A) 20 (B) 60 (C) 96 (D) 108 (E) 120

16. Als n een natuurlijk getal is, gelegen tussen 1000 en 2000, dan is

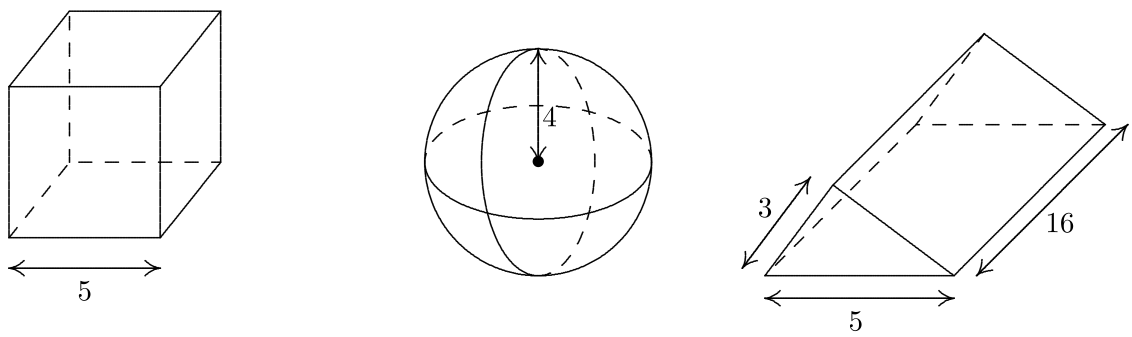
$$\frac{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\ldots+(4n-1)}$$

(A) $\frac{1}{3}$	(B) $\frac{1}{2}$	(C) 1
(D) 2	(E) afhankelijk van de waarde van n	

17. Zij $m = 777\ldots77$ het getal met 99 cijfers 7 en $n = 999\ldots99$, het getal met 77 cijfers 9. Hoeveel verschillende cijfers heeft dan het product $m.n$?

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

18. Noem K, B en P de volumes van respectievelijk de kubus, de bol en het recht prisma met afmetingen zoals aangeduid op de tekeningen.



Dan geldt:

(A) $B < K < P$	(B) $K < B < P$	(C) $P < B < K$
(D) $P < K < B$	(E) $K < P < B$	

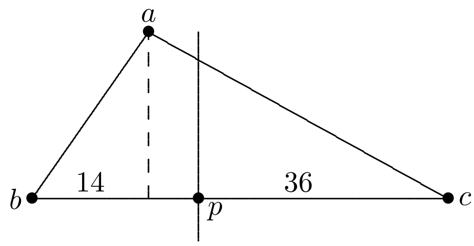
19. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 1$. Noem A de verzameling van alle $x \in \mathbb{R}$ die door f afgebeeld worden in $[0,3]$, dan is A gelijk aan

(A) $[0,8]$	(B) $[-2,2]$	(C) $[1,2]$
(D) $[0,2]$	(E) $[-2,-1] \cup [1,2]$	

20. In elke driehoek met zijden a, b en c is $a^2 + b^2 + c^2$ kleiner dan of gelijk aan

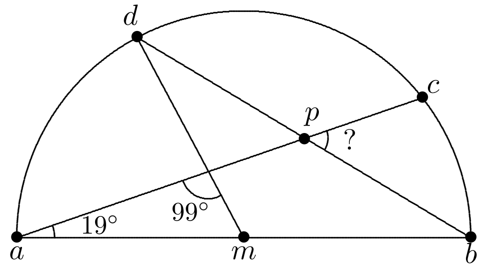
(A) $ab + ac + bc$	(B) $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$
(C) $a^3 + b^3 + c^3$	(D) $4a + 4b + 4c$
(E) $a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)$	

21. De basis van een driehoek abc wordt door de hoogtelijn uit a verdeeld in twee delen, één met lengte 14 en één met lengte 36 (zie tekening). Een rechte loodrecht op bc verdeelt de driehoek abc in twee delen met gelijke oppervlakte en snijdt bc in het punt p. De verhouding $\dfrac{|bp|}{|cp|}$ is gelijk aan



(A) 1	(B) $\frac{2}{3}$	(C) $\frac{11}{18}$	(D) $\frac{5}{9}$	(E) $\frac{1}{2}$

22. Op een halve cirkel met middellijn $[ab]$ en middelpunt m liggen twee punten c en d zoals op de figuur. Hoe groot is de hoek tussen ac en bd?



(A) 50°	(B) 51°	(C) 52°	(D) 53°	(E) 54°

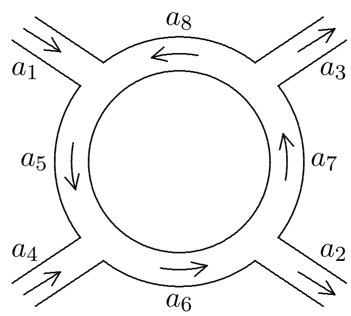
23. Veertig ballen zijn genummerd van 1 tot 40. Ze worden in dozen gelegd. Er wordt op gelet dat als een doos bal n bevat, ze geen enkele bal bevat met een nummer dat een veelvoud is van n. Hoeveel dozen zijn er minstens nodig?

(A) 5	(B) 6	(C) 12	(D) 14	(E) 20

24. Op volgende rotonde ("rondpunt") wordt uitsluitend in de richting van de pijlen gereden. Per uur

- komen er 1000 auto's aan via a_1,
- verlaten 800 auto's de rotonde via a_2,
- rijden er 1500 auto's op het stuk a_5 en
- rijden er 900 over het stuk a_7.

Hoeveel komen er dan per uur via a_4 aan en hoeveel verlaten er per uur de rotonde via a_3?



(A) 0 en 400	(B) 200 en 400	(C) 400 en 400	(D) 400 en 800	(E) 400 en 600

25. Als An op de schouders van Bart staat, kan ze juist over de muur kijken.
Als Bart op de schouders van Kris staat, kan hij niet over de muur kijken.
Als Kris op de schouders van Dirk staat, kan hij ruim over de muur kijken.

De grootste en kleinste zijn

(A) An en Kris	(B) An en Bart	(C) Dirk en Kris
(D) Dirk en Bart	(E) niet te bepalen	

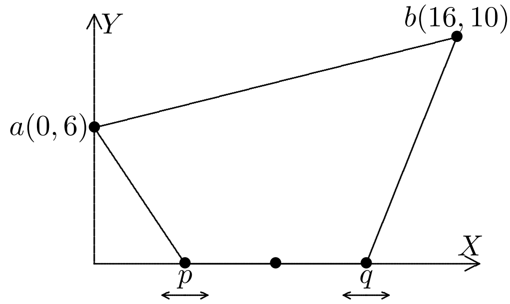
26. Een rechthoek wordt verkregen door in een vierkant twee overstaande zijden 10% te verlengen en de andere zijden 10% te verkorten. In vergelijking met de oppervlakte van het vierkant, is de oppervlakte van de rechthoek

(A) even groot	(B) 10% groter	(C) 1% groter
(D) 10% kleiner	(E) 1% kleiner	

27. Als men de cijfers van 1 tot 6 in een willekeurige volgorde schrijft, verkrijgt men een getal van 6 cijfers. De kans dat dit getal deelbaar is door 6, is gelijk aan

(A) $\frac{1}{6}$	(B) $\frac{1}{3}$	(C) $\frac{1}{2}$	(D) $\frac{2}{3}$	(E) $\frac{5}{6}$

28. In een orthonormaal assenstelsel beschouwen we de punten $a(0,6)$ en $b(16,10)$. Een lijnstuk $[pq]$ met vaste lengte 8 beweegt langs de X-as. Wat moet de abscis van het midden van $[pq]$ zijn, opdat de vierhoek $abqp$ de kleinst mogelijke omtrek zou hebben?



(A) 4	(B) 7	(C) 8	(D) 10	(E) 12

29. Welke van de volgende vergelijkingen heeft als grafiek precies de rand van een driehoek?

(A) $x.y.(x+y-1)=0$	(B) $\sqrt{x}.\sqrt{y}.\sqrt{x+y-1}=0$
(C) $\sqrt{x}.\sqrt{y}.\sqrt{1-x-y}=0$	(D) $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert+\lvert x+y-1\rvert=0$
(E) $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y-1}=0$	

30. Beschouw de functies $f(x)=1-x$ en $g(x)=\dfrac{1}{x}$ en samenstellingen van deze functies met zichzelf en met elkaar. Als we steeds blijven samenstellen, gebruik makend van alle verkregen functies, dan is het totaal aantal verschillende functies zo verkregen

(A) niet groter dan vijf
(B) groter dan vijf maar niet groter dan tien
(C) groter dan tien maar niet groter dan honderd
(D) eindig maar groter dan honderd
(E) oneindig