# 1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1996–1997: Eerste Ronde.

De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen. Het quoteringssysteem werkt als volgt : een deelnemer start met 30 punten. Per goed antwoord krijgt hij of zij 5 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 1 punt en een foutief antwoord wordt als 0 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 3 uur.

## 1.1 De problemen.

1. Welk getal is niet rationaal?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (A) $-1997$ | (B) $8^{2/3}$ | (C) $\sqrt{0{,}49}$ | (D) $100^{0{,}5}$ | (E) $1000^{0{,}1}$ |

2. Twee getallen hebben dezelfde som als de wortels van $x^2 + 6x + 1 = 0$ en hetzelfde product als de wortels van $x^2 + 8x + 7 = 0$. Wat is het grootste van die twee getallen?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (A) $-3+\sqrt{2}$ | (B) $-1$ | (C) $-4+\sqrt{15}$ | (D) $3+\sqrt{2}$ | (E) $7$ |

3. Zij $f(x) = 3x - 2$. De inverse functie $f^{-1}$ heeft als grafiek een rechte die de $y$-as snijdt in

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (A) $(0, -\frac{2}{3})$ | (B) $(0, -\frac{1}{2})$ | (C) $(0, -2)$ | (D) $(0, \frac{1}{2})$ | (E) $(0, \frac{2}{3})$ |

4. Een aantal konijnen en fazanten zit in een kooi. Ze hebben in totaal 35 koppen en 94 poten. Het verschil tussen het aantal fazanten en het aantal konijnen is gelijk aan

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (A) 7 | (B) 9 | (C) 11 | (D) 13 | (E) 15 |

5. Verlengt men alle zijvlakken van een kubus, dan wordt de ruimte verdeeld in een aantal gebieden. Hoeveel?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (A) 9 | (B) 16 | (C) 24 | (D) 27 | (E) 32 |

6. Eén van de volgende functies van $x$ heeft een grafiek die niet symmetrisch is t.o.v. de $y$-as. Welke?

| | | |
|---|---|---|
| (A) $1+\sin^2 x$ | (B) $\sin(1+x^2)$ | (C) $\sin(x+1)^2$ |
| (D) $1-\sin\lvert x\rvert$ | (E) $\sin(1+x)+\sin(1-x)$ | |

7. Hoeveel van de volgende vier uitspraken over natuurlijke getallen zijn waar?

   (1) Van drie opeenvolgende oneven getallen zijn er precies twee priem.

   (2) Van drie opeenvolgende oneven getallen zijn er minstens twee priem.

   (3) Van drie opeenvolgende oneven getallen is er minstens één priem.

   (4) Van drie opeenvolgende oneven getallen is er minstens één niet priem.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (A) 0 | (B) 1 | (C) 2 | (D) 3 | (E) 4 |

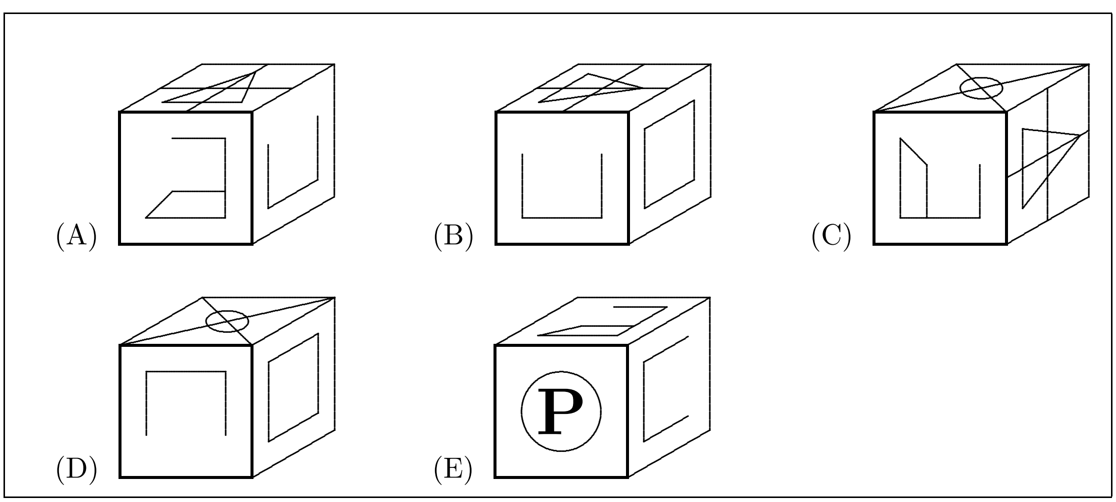
8. $P$ en $Q$ zijn reële veeltermen in $x$, respectievelijk van graad $m$ en $n$ met $0 < n < m$. De graad van $(P - Q)(P + Q)$ is

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (A) $2m$ | (B) $m^2$ | (C) $n^2$ | (D) $mn$ | (E) $m^2 - n^2$ |

9. Noem $A$ de verzameling van alle leerkrachten, $B$ de verzameling van alle mensen met een luxueuze wagen en $C$ de verzameling van alle mensen met een rijke partner. Welke van de volgende beweringen is equivalent met de uitspraak dat onder de leerkrachten enkel die met een rijke partner zich een luxueuze wagen kunnen veroorloven?

| | | |
|---|---|---|
| (A) $B \subset A \cup C$ | (B) $A \cap C \subset B$ | (C) $A \cap B \subset C$ |
| (D) $B \subset A \cap C$ | (E) $C \subset A \cap B$ | |

10. Ziehier 4 afbeeldingen van dezelfde dobbelsteen. Eén afbeelding is van een andere dobbelsteen. Welke ?



11. De rij $0, -1, 0, 1, -2, -1, 0, 1, 2, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$ ontstaat door onderstaande piramide te lezen van boven naar beneden en elke lijn van links naar rechts.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 0 & & & & & \\
 & & & & -1 & 0 & 1 & & & & \\
 & & & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & & & \\
 & & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & & \\
 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

De 1997-ste term van die rij is gelijk aan

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (A) 14 | (B) 15 | (C) 16 | (D) 17 | (E) 18 |

12. Zijn $a, b \in \mathbb{N}_0$ met $a \neq b$ en zij $V$ de kleinste van alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ waarvoor:

$$(1)\ \ a, b \in V \qquad \text{en} \qquad (2)\ \ \forall x, y : x, y \in V \Rightarrow x + y \in V.$$

Dan is $V$ gelijk aan

| | |
|---|---|
| (A) $\{a, b, a+b\}$ | (B) $\{na + mb \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}$ |
| (C) $\mathbb{N}_0$ | (D) $\{na + mb \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ |
| (E) $\{na + mb \mid n, m \in \mathbb{N}, (m, n) \neq (0, 0)\}$ | |

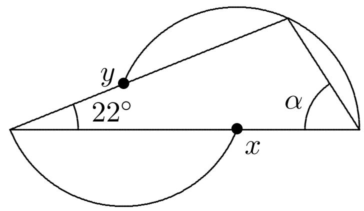
13. Beschouw de punten $p(-2, -1)$ en $q(2, 2)$ in het vlak. Als $r(k, 1)$ een punt is zodanig dat $|pr| + |rq|$ minimaal is, dan is $k$ gelijk aan

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (A) $\frac{1}{3}$ | (B) $\frac{3}{4}$ | (C) $\frac{2}{3}$ | (D) 1 | (E) $\frac{4}{3}$ |

14. Voor elke $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, is $(2n)^{2n} - 1$ deelbaar door

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (A) 2 | (B) 3 | (C) $n$ | (D) $n - 1$ | (E) $2n + 1$ |

15. In de figuur zijn $x$ en $y$ middelpunten van de geschetste cirkelbogen. Bereken de hoek $\alpha$.




| (A) 44° | (B) 46° | (C) 57° | (D) 60° | (E) 68° |
|---|---|---|---|---|

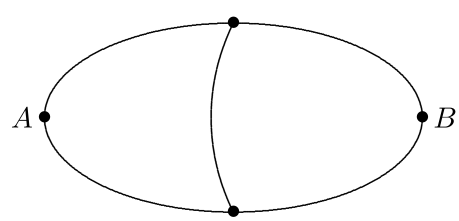
16. Gegeven zijn twee verschillende getallen $a$ en $b$. De rechte door $(a, a^3)$ en $(b, b^3)$ snijdt de kromme met vergelijking $y = x^3$ in nog een derde punt. Dit punt heeft als $y$-coördinaat

| (A) $a + b$ | (B) $a - b$ | (C) $-a - b$ | (D) $-(a+b)^3$ | (E) $(a-b)^3$ |
|---|---|---|---|---|

17. Het aantal oplossingen van de vergelijking $|x - 2| + |x - 3|^{-1} = 4$ is gelijk aan

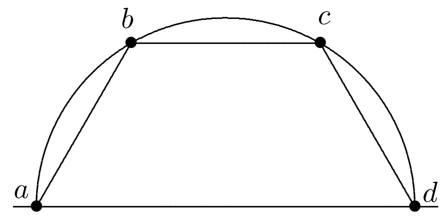
| (A) 1 | (B) 2 | (C) 3 | (D) 4 | (E) 6 |
|---|---|---|---|---|

18. Een park heeft twee ingangen $A$ en $B$ en het hierbij getekend
wegenpatroon. Een jogger wenst een circuit af te leggen, beginnend bij een
ingang, waarbij hij elke
weg precies éénmaal aflegt in elk van beide richtingen zonder ooit rechtsomkeer te maken. Op hoeveel manieren is dit mogelijk?
één van de twee ingangen als vertrekpunt neemt?




| (A) 0 | (B) 2 | (C) 4 | (D) 6 | (E) 8 |
|---|---|---|---|---|

19. Een halve cirkel wordt in drie gelijke delen verdeeld, waardoor een vierhoek $abcd$ ontstaat (zie figuur). Hoe groot is de oppervlakte van deze vierhoek als de straal van de cirkel 2 is?




| (A) $4$ | (B) $3\sqrt{2}$ | (C) $3\sqrt{3}$ | (D) $6\sqrt{3}$ | (E) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|

20. Op een kantoor werken 18 personen: één enkele spreekt Nederlands, Frans en Engels; 3 spreken Frans en Engels; 13 personen spreken Nederlands en 5 onder hen ook Engels; 9 spreken Frans; niemand spreekt uitsluitend Engels. Hoeveel personen op dat kantoor spreken uitsluitend Frans?

| (A) 2 | (B) 3 | (C) 4 | (D) 5 | (E) 6 |
|---|---|---|---|---|

21. Twee regelmatige achthoeken met zijden $z$ en $Z$ hebben hetzelfde middelpunt en hun zijden zijn twee aan twee evenwijdig; de oppervlakte van de grootste (met zijde $Z$) is tweemaal deze van de kleinste. Bepaal de kortste afstand tussen hun zijden.

| (A) $\frac{z}{3}$ | (B) $\frac{z}{2}$ | (C) $\frac{Z}{3}$ | (D) $\frac{Z}{2}$ | (E) $z$ |
|---|---|---|---|---|

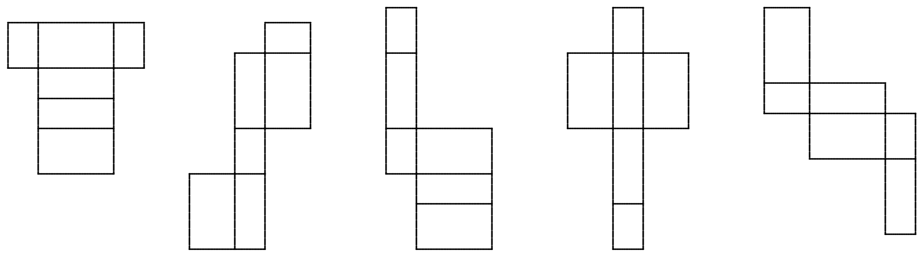
22. Van de drie volgende betrekkingen

$$\begin{aligned} \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c &= 1 \\ \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c &= 2 \\ \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c &= 3 \end{aligned}$$

zijn er $m$ geldig in elke rechthoekige driehoek en zijn er $n$ geldig in elke gelijkzijdige driehoek. Hieruit volgt dat $m + n$ gelijk is aan

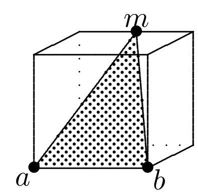
| (A) 1 | (B) 2 | (C) 3 | (D) 4 | (E) 5 |
|---|---|---|---|---|

23. Met hoeveel van onderstaande ontwikkelingen kan men een gesloten doos vormen als men vouwt volgens de ribben?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

24. Men verbindt het midden $m$ van een ribbe van een kubus met de twee verst verwijderde hoekpunten $a$ en $b$. De cosinus van $\widehat{amb}$ is gelijk aan




(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{7}{9}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

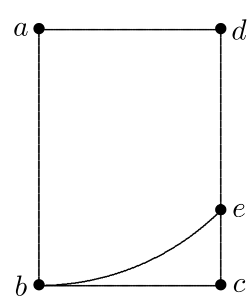
25. De oppervlakte van de unie van alle vierkanten met zijde 1, waarvan het middelpunt in een vast vierkant met zijde 1 ligt is

(A) $3+\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}+1$ (C) $\frac{7}{2}$
(D) $4$ (E) $2+2\sqrt{2}$

26. Een getal van acht cijfers is een veelvoud van 73 en tevens een veelvoud van 137. Bovendien weten we dat het tweede cijfer van links een 7 is. Wat is dan het zesde cijfer van links?

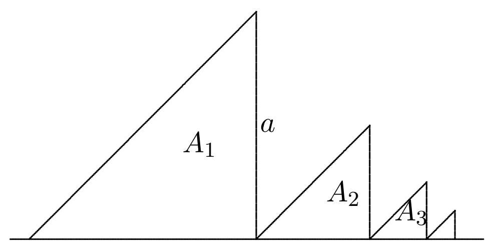
(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

27. Een rechthoekig blad papier $abcd$ heeft A4-formaat, d.w.z. (zie figuur) dat
$$\frac{|ab|}{|ad|}=\sqrt{2}.$$
Met $a$ als middelpunt en $|ab|$ als straal tekenen we een cirkelboog, die $cd$ snijdt in een punt $e$.
Als $|ab| = \lambda$ en $|ad| = \mu$, dan is $|de|$ gelijk aan



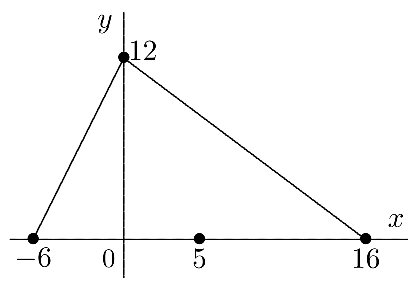
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (A) $\lambda$ | (B) $\mu$ | (C) $\lambda - \mu$ | (D) $\dfrac{\lambda^2}{\mu}$ | (E) $\dfrac{\mu^2}{\lambda}$ |

28. Beginnend met een gelijkbenige rechthoekige driehoek $A_1$ (met rechthoekszijde $a$), verlengen we een rechthoekszijde en brengen daarop een tweede gelijkvormige driehoek $A_2$ aan, waarvan de afmetingen de helft zijn van de eerste (zie figuur). We doen dit opnieuw uitgaande van $A_2$ om $A_3$ te construeren, tot in het oneindige. Er ontstaat een soort zaagtandfiguur. Bepaal de totale oppervlakte van deze figuur.



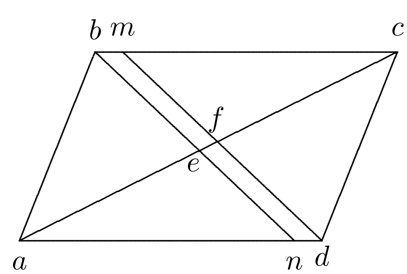

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (A) $a^2$ | (B) $\dfrac{3a^2}{4}$ | (C) $\dfrac{2a^2}{3}$ | (D) $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2}$ | (E) $\dfrac{\sqrt{2}a^2}{2}$ |

29. We beschouwen een driehoek met hoekpunten $(-6, 0)$, $(0, 12)$ en $(16, 0)$ (zie figuur). Hoeveel punten met gehele coördinaten zijn er op de zijden van deze driehoek die samen met $(0, 0)$ en $(5, 0)$ een stomphoekige driehoek bepalen?




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (A) 2 | (B) 5 | (C) 7 | (D) 9 | (E) 15 |

30. Op de zijde $[bc]$ van een parallellogram $abcd$ nemen we het punt $m$ zo dat $\overrightarrow{bm} = 0{,}1\overrightarrow{mc}$. Op de zijde $[ad]$ nemen we $n$ zo dat $\overrightarrow{an} = 10\overrightarrow{nd}$. De rechten $bn$ en $md$ snijden $ac$ in $e$ en $f$. De vector $\overrightarrow{ef}$ is gelijk aan




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (A) $\dfrac{1}{10}\overrightarrow{ac}$ | (B) $\dfrac{1}{11}\overrightarrow{ac}$ | (C) $\dfrac{1}{19}\overrightarrow{ac}$ | (D) $\dfrac{1}{20}\overrightarrow{ac}$ | (E) $\dfrac{1}{21}\overrightarrow{ac}$ |