1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1993–1994 : Eerste Ronde.

De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen, opgemaakt door de jury van VWO. Het quoteringssysteem werkt als volgt : een deelnemer start met 30 punten. Per goed antwoord krijgt hij of zij 4 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem of haar 0 punten en een foutief antwoord wordt als -1 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 3 uur.

1.1 De problemen.[2]

1. Een volgeladen vrachtwagen weegt x ton. Als deze voor de helft geladen is, weegt hij y ton. Hoeveel ton weegt de lege vrachtwagen?

(A) $\frac{x-y}{2}$	(B) $x-y$	(C) $x-2y$	(D) $2y-x$	(E) $2x-2y$

2. Zij $a, b \in \mathbb{N}$. Welke uitspraak is fout?

(A) a en b oneven $\Longrightarrow a+b$ even
(B) a even, b oneven $\Longrightarrow a+b$ oneven
(C) a en b oneven $\Longrightarrow ab$ oneven
(D) a^2 oneven $\Longrightarrow a$ oneven
(E) a even, b oneven $\Longrightarrow ab$ oneven

3. Zeven steden A, B, C, D, E, F en G zijn verbonden door de éénrichtingswegen w_1, w_2, w_3, w_4 en w_5 en wel op de volgende manier :

w_1 gaat van A naar C over B,
w_2 gaat van C naar D en vervolgens over B naar F,
w_3 gaat van D naar A over E,
w_4 gaat van F naar B over G,
w_5 gaat van G naar D.

Bepaal het kleinste aantal wegsegmenten dat moet afgesloten worden om verkeer van B naar D onmogelijk te maken .

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

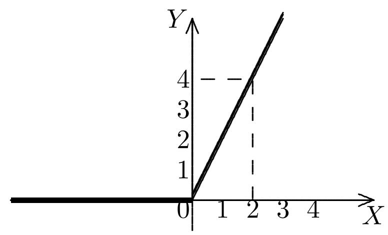
4. Gegeven is de functie $f : x \mapsto x^2$. Dan is $f(f(f(8)))$ gelijk aan

(A) 2^9	(B) 2^{11}	(C) 2^{18}	(D) 2^{24}	(E) 2^{32}

5. Een afbeelding $f : A \to B$ noemen we een *surjectie* als elk element van B het beeld is van een element van A. Het aantal surjecties $f : \{1,2\} \to \{a,b,c\}$ is

(A) 0	(B) 2	(C) 4	(D) 6	(E) 8

6. De hiernaast staande gebroken lijn heeft als vergelijking



(A) $y = 2x$	(B) $y = \|x\| + x$	(C) $y = \|x\| - x$
(D) $y = x - \|x\|$	(E) $y = 2\|x\| - x$	

7. Voor hoeveel elementen (a,b) uit de verzameling

$$\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N} \text{ en } b = a+1 \text{ en } \ b < 6\}$$

geldt dat $a^b < b^a$?

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

8. In een klasje met vier leerlingen haalt de leraar toetsen op en deelt ze dan onmiddellijk terug uit zodat de leerlingen de toets zelf kunnen verbeteren. Op hoeveel verschillende manieren kunnen de toetsen teruggegeven worden zo dat geen enkele leerling zijn eigen toets verbetert?

(A) 6	(B) 9	(C) 14	(D) 23	(E) 24

9. Drie personen A, B en C bevinden zich op een zelfde hoekpunt van een gelijkzijdige veelhoek. Ze vertrekken terzelfdertijd en doorlopen de omtrek van de veelhoek. A doet dit echter in tegengestelde zin van B en C.
A ontmoet B op een zeker hoekpunt. Twee hoekpunten verder ontmoet hij C. Als men weet dat A twee keer zo snel is als B, die zelf twee keer zo snel is als C, welke gelijkzijdige veelhoek betreft het hier dan?

(A) 9-hoek	(B) 12-hoek	(C) 15-hoek	(D) 16-hoek	(E) 20-hoek

10. Een trapezium wordt door zijn middenparallel verdeeld in twee delen. Zij k de verhouding van de oppervlaktes van deze twee delen. Welke van de volgende waarden is onmogelijk voor k?

(A) $\frac{2}{3}$	(B) $\frac{4}{3}$	(C) 2	(D) $\frac{8}{3}$	(E) $\frac{10}{3}$

11. Zij $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \sqrt{x}$, dan geldt voor alle x in $\mathbb{R}^+$:

(A) $f(x) \leq g(x)$	(B) $h(x) \leq f(x)$	(C) $h(x) \leq g(x)$
(D) $g(x) \leq f(x)$	(E) geen van de vorige	

12. In een orthonormaal assenstelsel snijdt een vertikale rechte de parabool met vergelijking $y = \frac{1}{2}x^2$ in het punt a en de rechte met vergelijking $x - y = 2$ in het punt b. De kleinst mogelijke afstand tussen de punten a en b is gelijk aan

(A) 1	(B) 1,625	(C) $\sqrt{2}$	(D) 1,5	(E) 2

13. In een ruit met diagonalen van lengte 6 en 8 wordt een cirkel ingeschreven. De straal van die cirkel is

(A) 2	(B) 2,25	(C) 2,4	(D) 2,5	(E) $\sqrt{12}$

14. Noem α de hoek die een ribbe en een (lichaams)diagonaal van een kubus (uit een zelfde hoekpunt) met elkaar maken, dan is $\cos\alpha$ gelijk aan

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$	(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	(C) $\frac{1}{2}$	(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	(E) $\sqrt{2}$

15. Hoeveel gelijkbenige driehoeken (twee aan twee niet congruent) kan men vormen door enkel de lengtes 3 cm, 7 cm of 10 cm voor de zijden te gebruiken?

(A) 3	(B) 4	(C) 6	(D) 7	(E) 9

16. Honderd koffers bevatten elk een gelijk aantal munten. Men neemt een zeker aantal munten uit de eerste koffer, het dubbele aantal uit de tweede, driemaal zoveel uit de derde, enz ..., tot honderd maal zoveel munten uit de honderdste. Er liggen in totaal 14950 munten in de koffers wanneer er nog één enkele munt in de laatste koffer overblijft. Hoeveel waren er oorspronkelijk in elke koffer?

(A) 151	(B) 201	(C) 251	(D) 301	(E) 351

17. Op welk van onderstaande intervallen is $\dfrac{2-x}{x-3}$ steeds de sinus van een hoek?

(A) $[1,3[$	(B) $[0,3[$	(C) $]2,3[$
(D) $]-\infty,\dfrac{5}{2}]$	(E) $]\dfrac{5}{2},+\infty[$	

18. Beschouw, in een vlak, een vierkant met zijde a en een rechte L evenwijdig met een zijde van het vierkant. Door evenwijdige projectie van het vierkant op L verkrijgt men een lijnstuk met lengte $3a$. De projecterende lijnen maken een hoek α met L. De tangens van de hoek α is gelijk aan

(A) $\dfrac{1}{3}$	(B) $\dfrac{1}{2}$	(C) 2
(D) 3	(E) geen van de vorige	

19. Driehoek abc heeft oppervlakte S. Driehoek xyz is gedefinieerd door :

$$\overrightarrow{ax} = 2\,\overrightarrow{ab};\quad \overrightarrow{by} = 3\,\overrightarrow{bc};\quad \overrightarrow{cz} = 4\,\overrightarrow{ca}\,.$$

De oppervlakte van driehoek xyz is

(A) $14S$	(B) $15S$	(C) $16S$	(D) $18S$	(E) $20S$

20. Beschouw in een orthonormaal assenstelsel de rechte A met vergelijking $y = \sqrt{3}x$. Beschouw de rechten evenwijdig met A respectievelijk door de punten $(1,0)$ en $(0,1)$. De afstand tussen deze laatste rechten is

(A) 2	(B) $\sqrt{3}$	(C) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$	(D) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$	(E) $\sqrt{2}$

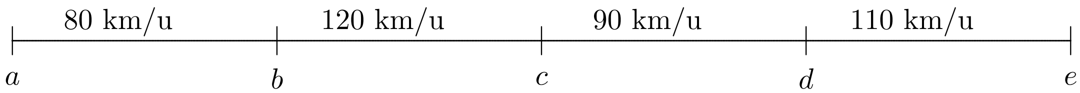
21. Hoeveel verschillende waarden voor c komen voor in de oplossingen van het stelsel

$$\begin{cases} a+b &= c^2 d \\ a+b+c &= 42 \end{cases}$$

met $a,b,c,d \in \mathbb{N}$.

(A) 2	(B) 3	(C) 4	(D) 8	(E) oneindig veel

22. Een voertuig legt het traject van a naar e af. De vier gelijke afstanden ab, bc, cd, en de worden tegen een verschillende, doch constante snelheid afgelegd (zie schema).



Als we door V de gemiddelde snelheid (in km/u) voorstellen over het traject ac en door W de gemiddelde snelheid over het traject ce, dan is

(A) $V < W < 100$	(B) $V = W = 100$	(C) $100 < V \leq W$
(D) $W \leq V < 100$	(E) $100 < W < V$	

23. Twee cirkels met straal 1 raken elkaar in een punt p. Er wordt een cirkel geconstrueerd door de punten a,b,c waarbij a het eindpunt is van de middellijn pa van de eerste cirkel en b en c de eindpunten zijn van de middellijn van de tweede cirkel, loodrecht op de rechte ap. Wat is de straal van de derde cirkel?

(A) $\frac{3}{2}$	(B) $\frac{\sqrt{10}}{2}$	(C) $\frac{5}{3}$	(D) $\sqrt{3}$	(E) 2

24. Voor hoeveel reële waarden van r heeft de vergelijking in x

$$x^4 - (r+1)x^2 + r = 0$$

vier verschillende reële oplossingen die de opeenvolgende termen van een rekenkundige rij vormen?

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 4	(E) oneindig veel

25. Een kubus wordt gekleurd door elk zijvlak een andere kleur te geven (we gebruiken zes verschillende kleuren). Op hoeveel verschillende manieren kan dit? Twee kleuringen noemen we gelijk van zodra de ene in de andere omgezet kan worden door de kubus te draaien.

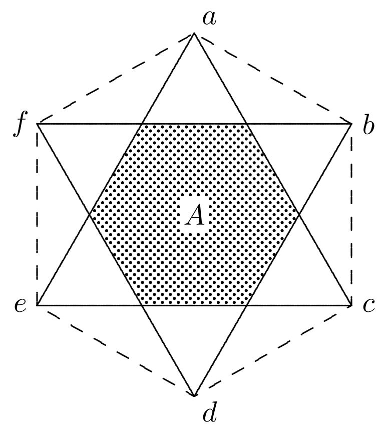
(A) 30	(B) 60	(C) 120	(D) 360	(E) 720

26. Stel $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Bijvoorbeeld: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Noem k het kleinste natuurlijk getal verschillend van 0 zodat $k!$ deelbaar is door 1000. De som van de cijfers van k is gelijk aan

(A) 1	(B) 2	(C) 5	(D) 6	(E) 7

27. Twee congruente gelijkzijdige driehoeken *ace* en *bdf* worden zo geplaatst dat de ene de symmetrische is van de andere t.o.v. hun gemeenschappelijk zwaartepunt. Als A de zeshoek is gemeenschappelijk aan de twee driehoeken en B de zeshoek $abcdef$, dan is

$$\frac{\text{opp}(B)}{\text{opp}(A)} =$$



(A) $\sqrt{3}$	(B) 2	(C) 3	(D) $2\sqrt{3}$	(E) 4

28. Stel $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} : x \mapsto \lfloor 3 \sin x \rfloor$. Hierbij is $\lfloor a \rfloor$ het grootste geheel getal kleiner dan of gelijk aan a. Bijvoorbeeld: $\lfloor \pi \rfloor = 3$ en $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.
De grafiek van f heeft een aantal “geïsoleerde” punten. Dit aantal is

(A) 0	(B) 1	(C) 2	(D) 3	(E) 7

29. In een school wordt elk jaar een opstelwedstrijd georganiseerd. De vijf finalisten An, Bart, Carla, David en Erna hebben zopas hun uitslag ontvangen. Ieder kent zijn eigen plaats in de eindrangschikking (van 1 tot 5; er zijn geen ex aequo’s). Carla weet bovendien dat David twee plaatsen voor An geëindigd is. Aangezien ze ervan overtuigd is dat Erna de wedstrijd onmogelijk kan gewonnen hebben (en ze heeft gelijk), besluit ze dat ze de rangschikking volledig kent. Op welke plaats is Carla geëindigd ?

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5

30. Een boek telt n bladzijden die genummerd zijn $1, 2, 3, \ldots n$. Het cijfer 1 werd juist 213 keer gebruikt. Hoeveel bladzijden telt het boek?

(A) 517	(B) 518
(C) $519 \leq n \leq 520$	(D) $521 \leq n \leq 530$
(E) $531 \leq n \leq 540$	