

# 1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1990-1991: Eerste Ronde.

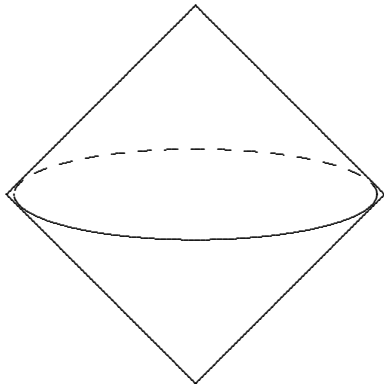
De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen, opgemaakt door de jury van VWO. Het quoteringsysteem werkt als volgt: een deelnemer start met 30 punten. Per goed antwoord krijgt hij 4 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem 0 punten en een foutief antwoord wordt als -1 aangerekend. De voorziene antwoordduur bedraagt 3 uur.

## 1.1 De problemen.

1. Het quotiënt van  $50^{50}$  door  $25^{25}$  is gelijk aan

- (A.)  $25^{25}$  (B.)  $10^{25}$  (C.)  $100^{25}$  (D.)  $2^{25}$  (E.)  $2 \cdot 25^{25}$
- 

2.



Een vierkant met zijde  $z$  draait om één van zijn diagonalen. Hoe groot is het volume van het beschreven lichaam?

- (A.)  $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi z^3$  (B.)  $\frac{\pi z^3}{6\sqrt{2}}$  (C.)  $\frac{\pi z^3}{\sqrt{2}}$  (D.)  $\frac{2}{3}\pi z^3$  (E.)  $\frac{\pi z^3}{3\sqrt{2}}$
- 

3. De oplossingenverzameling in  $\mathbb{R}$  van  $||x| - 1| < 1$  is

- (A.)  $] - 2, 2[$  (B.)  $]0, 2[$  (C.)  $] - 2, 0[ \cup ]0, 2[$  (D.)  $] - 2, 0[$  (E.)  $] - 1, 1[$
- 

4. Verdeel een interval van lengte 1 in drie gelijke delen en neem het middelste deel weg. Behandel de twee overblijvende intervallen op dezelfde manier. Herhaal dit proces.



Stap 1:

Stap 2:

---

<sup>0</sup>©Vlaamse Wiskunde Olympiade v.z.w. . Overname enkel toegelaten mits bronvermelding.

De totale lengte die overblijft na stap  $n$  is gelijk aan

(A.)  $\frac{1}{n^2}$  (B.)  $\frac{1}{2^n}$  (C.)  $\frac{2}{3^n}$  (D.)  $\frac{2^n}{3^n}$  (E.)  $1 - \frac{1}{3^n}$

---

5. In een rechthoekige driehoek met hoeken  $a$ ,  $b$  en  $c$  zijn

$$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c \quad \text{en} \quad \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c$$

respectievelijk gelijk aan

(A.) 1 en 1 (B.) 1 en 2 (C.) 1,5 en 1,5 (D.) 2 en 1 (E.) 2 en 2

---

6. Zij  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x - \sqrt{x}$ , dan is  $f(\mathbb{R}^+)$  gelijk aan

(A.)  $\mathbb{R}^+$  (B.)  $\mathbb{R}$  (C.)  $[-\frac{1}{4}, +\infty[$  (D.) begrensd (E.)  $[-\frac{1}{2}, +\infty[$

---

7. Hoeveel gehele waarden van  $x$  voldoen aan  $3^x + 7 \cdot 9^x + 4 = 27^x + 5$ ?

(A.) 0 (B.) 1 (C.) 2 (D.) 3 (E.) oneindig veel

---

8. Vijf leerlingen bespreken de organisatie van een schoolfuif, gezeten aan een ronde tafel. Peeters zit tussen Goossens en Wolters. Greet zit tussen Tom en Bertels. Goossens zit tussen Jan en Greet. Tom is de neef van An. Koen heeft Janssens aan zijn linkerzijde en Wolters aan zijn rechterzijde.

Welk is de familienaam van An?

(A.) Peeters (B.) Wolters (C.) Bertels (D.) Janssens (E.) Goossens

9. Aangenomen dat ons alfabet bestaat uit 6 klinkers en 20 medeklinkers en dat een woord van 3 letters minstens 1 klinker en minstens 1 medeklinker moet bevatten, hoeveel verschillende woorden van drie letters kunnen er dan maximaal gevormd worden?

(A.) 2880 (B.) 3120 (C.) 8640 (D.) 9360 (E.) 18000

---

10. Stel  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  ( $x \neq 1$ ). Als  $y = f(x)$ , dan is  $x$  gelijk aan

(A.)  $\frac{1}{f(y)}$  (B.)  $f(\frac{1}{y})$  (C.)  $-\frac{f(y)}{y}$  (D.)  $-\frac{1}{yf(y)}$  (E.)  $\frac{1}{yf(y)}$

---

11.  $x^2 - y^2 = 63$ , met  $x, y \in \mathbb{N}$ . Hoeveel verschillende waarden kan  $x^2 + y^2$  aannemen?

(A.) 1 (B.) 2 (C.) 3 (D.) 4 (E.) geen van de vorige

12. De oplossingenverzameling in  $\mathbb{R}$  van  $x(x+1) > x$  is

(A.)  $\mathbb{R}_0$  (B.)  $\mathbb{R}_0^+$  (C.)  $\mathbb{R}$  (D.)  $] -1, +\infty[$  (E.)  $\emptyset$

---

13. Een rol papier die 500 aan elkaar hangende blaadjes van 12cm lengte bevat, is regelmatig opgewonden op een kartonnen cilinder van 5 cm doormeter. De uiteindelijke rol heeft een doormeter van 11 cm. Als we aannemen dat het papier gelijkmatig opgewonden is, hoeveel windingen zijn er dan (op 1 nauwkeurig)?

(A.) 119 (B.) 174 (C.) 239 (D.) 375 (E.) 750

---

14. In een  $15^\circ - 75^\circ - 90^\circ$  rechthoekige driehoek wordt de lengte van de kortste rechthoekszijde met  $x$  aangeduid. De lengte van de langste rechthoekszijde is dan

(A.)  $(\sqrt{2} + \sqrt{6})x$  (B.)  $\frac{4x}{\sqrt{2} - \sqrt{6}}$  (C.)  $(\sqrt{3} + 2)x$  (D.)  $5x$  (E.) niet te bepalen

---

15. In deze vraag is pu een Chinese lengtemaat en mu een oppervlaktemaat. Gegeven een rechthoekig veld met breedte 21 pu. De oppervlakte bedraagt  $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6})$  mu. Als we weten dat 1 pu een dubbele stap is en dat  $1 \text{ mu} = 240 \text{ pu}^2$ , wat is dan de lengte van het veld in stappen?

(A.)  $2\sqrt{3}$  (B.) 2 (C.) 14 (D.) 28 (E.) 56

---

16. Als de basis van een parallellogram met 20% verlengd wordt en de schuine zijde met 20% verkort, dan wordt de oppervlakte van het parallellogram

(A.) niet gewijzigd (B.) 4% kleiner (C.) 4% groter  
(D.) 20% groter (E.) in sommige gevallen groter, in andere kleiner

---

17. Voor een gegeven driehoek is het maatgetal van de oppervlakte gelijk aan het maatgetal van de omtrek. De straal  $R$  van de ingeschreven cirkel voldoet dan aan

(A.)  $R \leq 1$  (B.)  $1 < R \leq 3/2$  (C.)  $3/2 < R \leq 2$  (D.)  $2 < R$   
(E.)  $R$  is afhankelijk van het gegeven maatgetal

- 
18. Hoeveel natuurlijke getallen in de rij van 1 tot en met 1000 kan men schrijven als een macht  $a^b$  met  $a, b \in \mathbb{N}$  en  $a, b > 1$ ?

(A.) 25 (B.) 39 (C.) 40 (D.) 49 (E.) 50

19. Stel door  $A, B$  en  $C$  de lengten voor van de zijden van een driehoek en door  $a, b$  en  $c$  de grootte van de overstaande hoeken. Verder weten we dat  $\frac{B+C}{11} = \frac{C+A}{12} = \frac{A+B}{13}$ . Welke van de volgende uitspraken is juist?

(A.)  $\frac{\sin a}{10} = \frac{\sin b}{12} = \frac{\sin c}{14}$  (B.)  $\frac{\sin a}{10} = \frac{\sin b}{14} = \frac{\sin c}{12}$

(C.)  $\frac{\sin a}{12} = \frac{\sin b}{14} = \frac{\sin c}{10}$  (D.)  $\frac{\sin a}{14} = \frac{\sin b}{12} = \frac{\sin c}{10}$

(E.)  $\frac{\sin a}{14} = \frac{\sin b}{10} = \frac{\sin c}{12}$

---

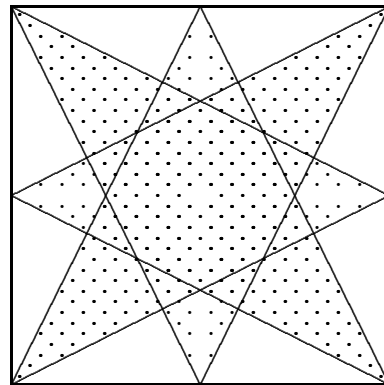
20. Zij  $A = \{a, b, c\}$ . Het aantal afbeeldingen  $f : A \rightarrow A$  waarvoor  $f \circ f = 1_A$  (de identiteit), is gelijk aan

(A.) 1 (B.) 3 (C.) 4 (D.) 6 (E.) 9

---

21.

Wat is de oppervlakte van de ster-vormige figuur die men verkrijgt door in een vierkant met zijde  $z$  elk middelpunt van een zijde te verbinden met de hoekpunten van de overstaande zijde?



(A.)  $\frac{1}{2}z^2$  (B.)  $\frac{2}{5}z^2$  (C.)  $\frac{3}{5}z^2$  (D.)  $\frac{4}{5}z^2$  (E.)  $\frac{9}{10}z^2$

---

22. Als  $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$  met  $2^p - 1$  een priemgetal, dan is de som van alle positieve delers van  $n$  gelijk aan

(A.)  $n - 1$  (B.)  $n$  (C.)  $2n - 1$  (D.)  $2n$  (E.)  $2^p + 2^{p-1} - 1$

- 
23. In een zak steken 24 speelkaarten: 2 rode en 22 zwarte. Jan noemt nu een nummer  $n$  van 1 tot 24. Rik haalt zonder kijken  $n$  kaarten één na één uit de zak. Als de  $n$ -de kaart de eerste rode is, heeft Jan gewonnen. Welk nummer moet Jan kiezen om de meeste kans te hebben om te winnen?

(A.) 1 (B.) 2 (C.) 12 (D.) 13 (E.) om het even als het maar niet 24 is

---

24. Zij  $a, b \in \mathbb{R}$ . De rij functies  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  wordt gedefinieerd door

$$f_1(x) = ax + b$$

$$f_n = f_{n-1} \circ f_1 \text{ als } n \geq 2.$$

Er geldt:  $f_{1990} = f_{1992} \neq f_{1991}$

- (A.) voor één enkele waarde van  $a$  en  $b$   
(B.) voor twee waarden van  $a$  en één van  $b$   
(C.) voor drie waarden van  $a$  en één van  $b$   
(D.) voor één waarde van  $a$  en elke waarde van  $b$   
(E.) voor twee waarden van  $a$  en elke waarde van  $b$
- 

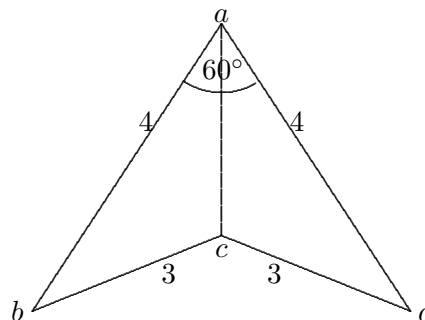
25.

De vierhoek  $abcd$  (zie figuur) is symmetrisch t.o.v.  $ac$  en niet convex. De totale hoek in  $a$  bedraagt  $60^\circ$ . Verder is gegeven dat  $|ab| = 4$  en  $|bc| = 3$ . De lengte van de diagonaal  $[ac]$  is gelijk aan

(A.)  $2\sqrt{3} - \sqrt{5}$  (B.)  $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$

(C.) 3 (D.)  $1/2$

(E.)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$



- 
26. In een driehoek  $abc$  geldt voor de lengten van de zijden:  $|bc| = 293$ ,  $|ab|$  is een kwadraat van een natuurlijk getal,  $|ac|$  is een macht van 2 en  $|ac| = 2|ab|$ . Noem  $P$  de omtrek van deze driehoek, dan geldt:

- (A.)  $P < 900$  (B.)  $900 \leq P < 980$  (C.)  $980 \leq P < 1060$  (D.)  $1060 \leq P$   
(E.)  $P$  is niet te bepalen uit de gegevens

- 
27. Een trapezium wordt door zijn middenparallel verdeeld in twee delen. De oppervlakten van deze twee delen verhouden zich zoals 5 tot 2. De verhouding van de grote basis tot de kleine basis is dan

$$(A.) \frac{5}{2} \quad (B.) \frac{25}{4} \quad (C.) 7 \quad (D.) 11 \quad (E.) 13$$

---

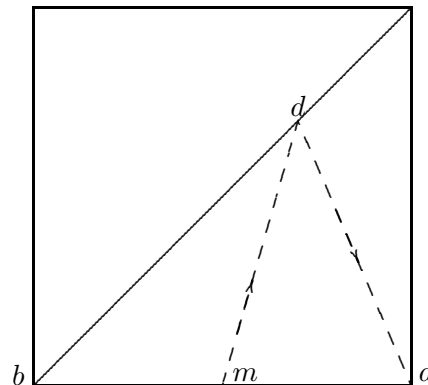
28. Een rechthoekige vloer is geheel belegd met vierkante tegels: 1274 in de lengte en 990 in de breedte. Beschouw een diagonaal van de vloer. Hoeveel tegels worden door die diagonaal doorgesneden? (We tellen een tegel alleen mee als de diagonaal door zijn binnengebied heen loopt.)

$$(A.) 1272 \quad (B.) 1274 \quad (C.) 1613 \quad (D.) 2262 \quad (E.) 2264$$

---

29.

In een vierkant met zijde 1 is een diagonaal getekend. Vanuit het midden  $m$  van een zijde (zie figuur) loopt men naar een punt  $d$  van de diagonaal en keert men terug naar het hoekpunt  $a$  van die zelfde zijde (niet op die diagonaal). Hoever moet  $d$  van  $b$  (het andere hoekpunt van die zijde) liggen opdat de som van de afstanden  $|md| + |da|$  zo klein mogelijk is?



$$(A.) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (B.) \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (C.) \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (D.) \frac{1}{2} \quad (E.) 0$$

---

30. Men noemt roosterpunt in  $\mathbb{R}^3$  elk punt waarvan alle drie de coördinaten gehele getallen zijn. Hoeveel roosterpunten liggen er op het oppervlak van een bol met middelpunt  $(0, 0, 0)$  en straal 9?

$$(A.) 6 \quad (B.) 30 \quad (C.) 54 \quad (D.) 78 \quad (E.) 102$$

---