1 Vlaamse Wiskunde Olympiade 1988-1989 : Eerste Ronde.

De eerste ronde bestaat uit 30 meerkeuzevragen, opgemaakt door de jury van VWO. Het quoteringssysteem werkt als volgt: een deelnemer start met 30 punten, per goed antwoord krijgt hij 4 punten bij, een blanco antwoord bezorgt hem 0 punten en een foutief antwoord wordt als -1 aangerekend.

1.1 De problemen.

1. Welke van de volgende afbeeldingen f van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is geen bijectie?

$(A.)\quad f(x) = x + 1 \quad (B.)\quad f(x) = 2x \quad (C.)\quad f(x) = -x \quad (D.)\quad f(x) = x^2 \quad (E.)\quad f(x) = x^3$

---

2. Als $f(x) = 2^x$, dan is $f(x + 2)$ gelijk aan

$(A.)\quad 4 \quad (B.)\quad f(x) + 2 \quad (C.)\quad f(x) + 4 \quad (D.)\quad 2f(x) \quad (E.)\quad 4f(x)$

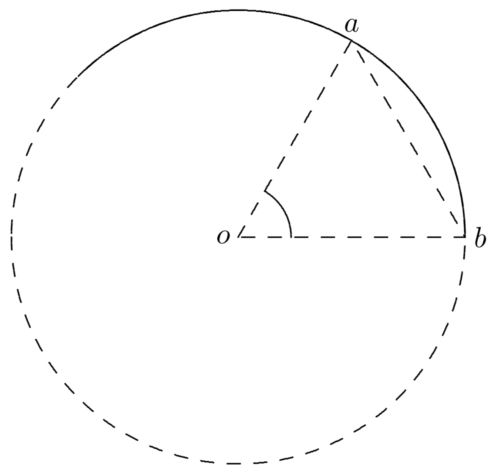
---

3. De voorzitter van een fietsclub is bijgelovig: hij weigert het cijfer 8 te zien in de nummers van de lidkaarten. Hoeveel nummers van 3 cijfers kan de secretaris vormen zonder het cijfer 8 te gebruiken? (de eerste drie nummers zijn 000, 001, 002)

$(A.)$ 700 $(B.)$ 720 $(C.)$ 729 $(D.)$ 730 $(E.)$ 888

---

4. In de cirkel met middelpunt o is α een hoek gelegen in het interval $]0°, 135°]$. Noem α_1 de waarde van α waarvoor de omtrek van Δoab maximaal is en α_2 de waarde van α waarvoor de oppervlakte van Δoab maximaal is.



Dan is

(*A*.) $\alpha_1 = 60°$ en $\alpha_2 = 60°$ (*B*.) $\alpha_1 = 90°$ en $\alpha_2 = 90°$
(*C*.) $\alpha_1 = 135°$ en $\alpha_2 = 135°$ (*D*.) $\alpha_1 = 90°$ en $\alpha_2 = 135°$
(*E*.) $\alpha_1 = 135°$ en $\alpha_2 = 90°$

---

5. r1 vr5 Als we beide getallen acht in 8^8 met twee vermenigvuldigen, dan wordt dit getal zelf vermenigvuldigd met

(*A*.) 2^2 (*B*.) 2^6 (*C*.) 2^{16} (*D*.) 2^{32} (*E*.) 2^{40}

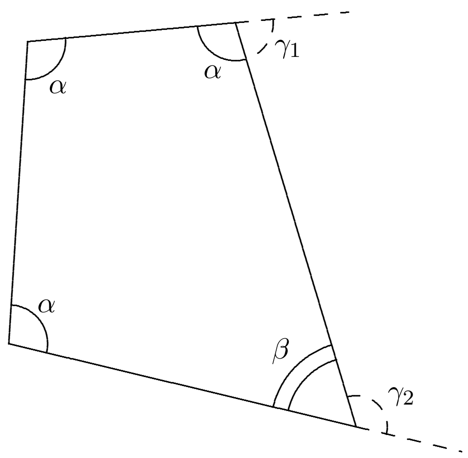
---

6. De negatie van $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 < x^4$ is:

(*A*.) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > x^4$ (*B*.) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x^4$ (*C*.) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = x^4$
(*D*.) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > x^4$ (*E*.) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x^4$

---

7. In de onderstaande convexe vierhoek geldt



(*A*.) $\gamma_2 = 360° - 3\gamma_1$ (*B*.) $\gamma_2 = 90° + \gamma_1$ (*C*.) $\gamma_2 = 90° - \gamma_1$
(*D*.) $\gamma_2 = 360° - \gamma_1$ (*E*.) $\gamma_2 = 180° - \gamma_1$

---

8. Een functie f is even en periodiek met periode 2; bovendien geldt dat

$$f(x) = x \text{ als } x \in [0, 1] \ .$$

Bepaal $f(-3.14)$.

(*A*.) -3.14 (*B*.) -0.86 (*C*.) -0.14 (*D*.) 0.14 (*E*.) 0.86

---

9. Als de reële getallen x en y voldoen aan de betrekking

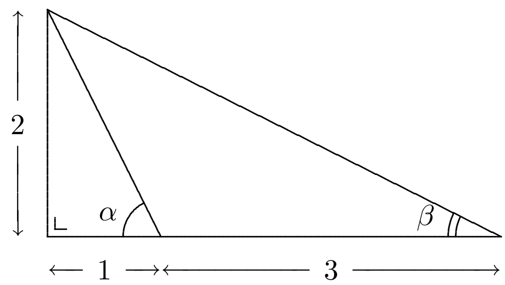
$$2x + y = 3$$

dan is de minimumwaarde van $x^2 + y^2$ gelijk aan

$$(A.)\quad 0 \quad (B.)\quad 2 \quad (C.)\quad \frac{9}{5} \quad (D.)\quad \frac{3}{\sqrt{5}} \quad (E.)\quad \frac{6}{5}$$

---

10. Hoe groot is $\alpha + \beta$?



$(A.)$ $80° < \alpha + \beta \leq 85°$ $(B.)$ $85° < \alpha + \beta \leq 90°$
$(C.)$ $90° < \alpha + \beta \leq 95°$ $(D.)$ $95° < \alpha + \beta \leq 100°$
$(E.)$ geen van de vorige

11.

$$\frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) + (\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}) + ...$$

$$... + (\frac{1}{80} + \frac{2}{80} + \frac{3}{80} + ... + \frac{79}{80}) =$$

$(A.)$ 1560 $(B.)$ 1580 $(C.)$ 3120 $(D.)$ 3160 $(E.)$ geen van de vorige

---

12. Het getal G is gelijk aan het produkt van alle gehele getallen van 100 tot en met 200. Als we G schrijven als een produkt van priemgetallen, hoeveel factoren 5 komen er dan voor in dat produkt?

$(A.)$ 20 $(B.)$ 21 $(C.)$ 24 $(D.)$ 26 $(E.)$ 27

---

13. Zij $k \in]0,1[$ en zij $x_1 = \cos\alpha$ een oplossing van $4x^3 - 3x - k = 0$. De andere oplossingen zijn

$$
\begin{array}{ll}
(A.) & x_2 = \cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) \ , \ x_3 = -\cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) \\
(B.) & x_2 = -\cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) \ , \ x_3 = -\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) \\
(C.) & x_2 = \cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) \ , \ x_3 = \cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) \\
(D.) & x_2 = -\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) \ , \ x_3 = \cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) \\
(E.) & x_2 = \cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) \ , \ x_3 = -\cos(\alpha - \frac{\pi}{3})
\end{array}
$$

---

14. Het stelsel

$$
\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 0 \\ (x-a)^2 + y^2 & = & 1 \end{cases}
$$

(met a als parameter) heeft precies drie oplossingen $(x, y) \in \mathbb{R}2$

(A.) voor geen enkele $a \in \mathbb{R}$
(B.) voor juist één reële waarde van a
(C.) voor juist twee reële waarden van a
(D.) voor een eindig aantal (groter dan twee) reële waarden van a
(E.) voor oneindig veel reële waarden van a

---

15. De middelpunten van de zijvlakken van een kubus zijn de hoekpunten van een regelmatig achtvlak. Welk is de verhouding van de twee inhouden?

$$
(A.)\ \frac{1}{8} \quad (B.)\ \frac{1}{6} \quad (C.)\ \frac{1}{4} \quad (D.)\ \frac{1}{3} \quad (E.)\ \frac{1}{2}
$$

---

16. Zij $f : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{17} + x^{16} + x^{15} + ... + x^2 + x$. Dan geldt de volgende bewering

(A.) f neemt alleen waarden aan in $[0, 1[$
(B.) f neemt alle waarden aan in $[0, 17]$
(C.) f wordt nooit groter dan $\frac{1}{2}$
(D.) f neemt alle reële waarden aan
(E.) f neemt alle positieve reële waarden aan

---

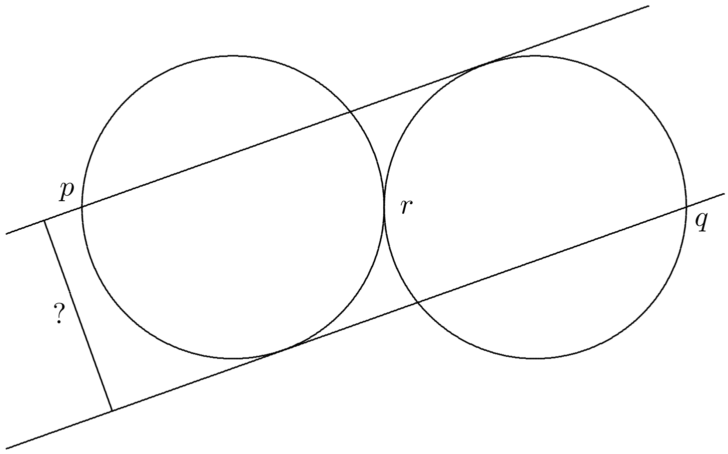
17. Het aantal oplossingen (x, y) van de vergelijking

$$
\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}
$$

met $x, y \in \mathbb{N}_0$, is gelijk aan

(A.) 1 (B.) 5 (C.) 9 (D.) 10 (E.) oneindig veel

18. pr en rq zijn de middellijnen van twee cirkels met straal 1, die elkaar raken in r. Door p en door q wordt een raaklijn getekend aan de andere cirkel zoals op de figuur. Welk is de afstand tussen die twee raaklijnen?



(A.) $\frac{5}{4}$ (B.) 1.3 (C.) $\frac{4}{3}$ (D.) $\sqrt{2}$ (E.) $\frac{3}{2}$

---

19. Een onderzoeksrechter ondervraagt 4 verdachten van een diefstal:

- "Chris heeft het gedaan", zegt Bert
- "Ik ben onschuldig", zegt Dirk
- "Als Bert zegt dat ik het gedaan heb, dan liegt hij", zegt Chris
- "Het is Bert", zegt Andries

Als je weet dat precies één van de vier de diefstal heeft gepleegd en dat ook precies één van de vier gelogen heeft, wie is dan de dief?

(A.) Andries (B.) Bert (C.) Chris (D.) Dirk
(E.) niet af te leiden uit de gegevens

---

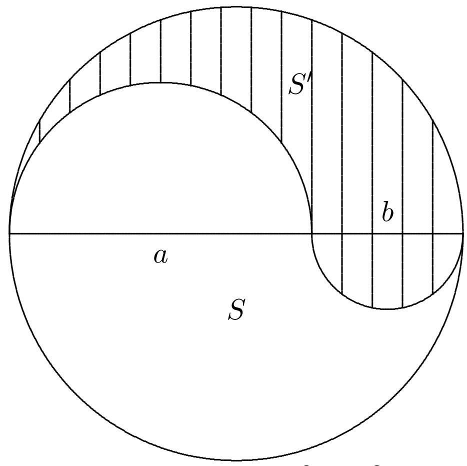
20. $\lfloor x \rfloor$ duidt het grootste geheel getal aan dat kleiner is dan of gelijk aan x. Bijvoorbeeld: $\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor \frac{13}{2} \rfloor = 6$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$.
Als

$$\lfloor \sqrt[4]{1} \rfloor + \lfloor \sqrt[4]{2} \rfloor + \lfloor \sqrt[4]{3} \rfloor + ... + \lfloor \sqrt[4]{n} \rfloor = 2n$$

dan is de waarde van n

(A.) 80 (B.) 81 (C.) 85 (D.) 90 (E.) 95

21. Een diameter van een cirkel met straal R wordt verdeeld in twee stukken met lengten a en b. Met a en b respectievelijk als diameter vormen we halve cirkels aan weerskanten van de gegeven diameter (zie figuur).
Voor de twee ontstane oppervlakten S en S' geldt dat $\frac{S}{S'}$ gelijk is aan



(A.) $\frac{a}{b}$ (B.) $\frac{a^2}{b^2}$ (C.) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (D.) $\frac{a+R}{b+R}$ (E.) $\frac{a^2+R^2}{b^2+R^2}$

---

22. Bij een medisch onderzoek voert men een test uit ter detectie van een besmetting. Men weet uit ervaring dat van de 20% die positief reageren er uiteindelijk 95% besmet zijn; dat van de 70% die negatief reageren op de test er slechts 10% besmet zijn en dat van de 10% die niet reageren op de test er 40% besmet is.
Wat is de kans dat iemand besmet is?

(A.) $\frac{3}{10}$ (B.) $\frac{1}{2}$ (C.) $\frac{3}{20}$ (D.) $\frac{29}{60}$ (E.) geen van de vorige

---

23. Gegeven zijn de drie getallen a, b, c met

$$a = 2^{(3^4)}\ ,\ b = 3^{(4^2)}\ ,\ c = 4^{(2^3)}$$

Welke van de volgende ordeningen is de juiste?

(A.) $a < b < c$ (B.) $b < a < c$ (C.) $c < a < b$ (D.) $c < b < a$ (E.) $b < c < a$

---

24. Zij $x \in \mathbb{R}$ en $|x+1| < 3$, dan geldt

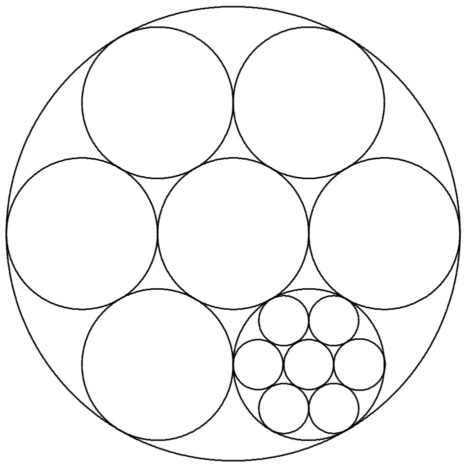
(A.) $|x| < 2$ (B.) $x < 2$ of $-x < 2$ (C.) $x < 2$ en $-x < 2$
(D.) $-2 < x < 2$ (E.) $-4 < x < 2$

---

25. Hoeveel driehoeken bestaan er waarvan de zijden lengten hebben die gehele getallen zijn en waarvan de omtrek gelijk is aan 10? (Geen twee driehoeken mogen congruent zijn.)

(A.) 1 (B.) 2 (C.) 3 (D.) 4 (E.) 5

26. Beginnend met een cirkel met straal R, construeren we in het inwendige ervan zeven cirkels met straal $\frac{R}{3}$ (zie figuur); we hernemen die werkwijze bij elk van de nieuwe cirkels en doen dit daarna nog vier keren zodat er naast de oorspronkelijke cirkel nog cirkels van zes verschillende groottes voorkomen. Over hoeveel cirkels is er hier in totaal sprake?



A. $\frac{7^7+1}{6}$ *B.* $\frac{7^7+1}{8}$ (*C.*) 7^6 (*D.*) $\frac{7^7-1}{6}$ (*E.*) 7^7

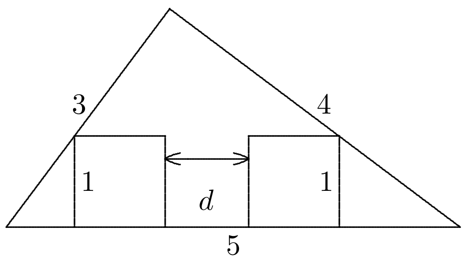
27. Hoeveel elementen moet een deelverzameling van $\{1, 2, 3, 4, ..., 999\}$ minstens hebben om alleszins twee elementen met som 1000 te bevatten?

A. 2 *B.* 500 (*C.*) 501 (*D.*) 998 (*E.*) 999

28. Elk rekeningnummer bij een financiële instelling bestaat uit 12 cijfers, opgesplitst in 3 groepjes als volgt: $123 - 1234567 - 84$. Als x het getal van 10 cijfers is dat men bekomt door de eerste twee groepjes naast elkaar te schrijven, dan vormen de laatste twee cijfers van het rekeningnummer de rest bij deling van x door 97.
Het rekeningnummer van Karel ziet er als volgt uit: $284 - 73604\ ..\ \ - 47$. Vind nu het getal van 2 cijfers dat op de plaats van de stippen moet worden ingevuld.

A. 40 *B.* 47 (*C.*) 54 (*D.*) 57 (*E.*) geen van de vorige

29. In een rechthoekige driehoek met zijden 3, 4 en 5 schuift men twee vierkantjes met zijde 1 over de hypotenusa tot ze elk één van de rechthoekszijden raken. Voor de afstand d tussen de vierkantjes geldt



A. $d \leq 0.9$ *B.* $0.9 < d < 1$ (*C.*) $d = 1$ (*D.*) $1 < d < 1.1$ (*E.*) $d \geq 1.1$

---

30. De vergelijking $x^5 + x + 1 = 0$ heeft

A. 5 reële wortels
B. geen reële wortels
(*C.*) positieve en negatieve reële wortels
(*D.*) één enkele reële wortel in $[-1, 0]$
(*E.*) enkel positieve reële wortels
